



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

---

Trabajo de Tesis de Maestría

LA FÍSICA CONTEMPORÁNEA  
Y ALGUNAS CONEXIONES CON LA INGENIERÍA

---

Tesista: Matias E. Rastelli Arcangeli

Director: Carlos A. García Canal

Año: 2021

---



# La Física Contemporánea y algunas conexiones con la Ingeniería

Ing. Matías E. Rastelli A.

10 de julio de 2021

## *Introducción:*

*En este trabajo se desarrollan temas de la física contemporánea y algunas conexiones con la ingeniería que han favorecido su desarrollo reciente. Estos temas se abordan siguiendo su evolución a lo largo de la historia, desde los principios de la mecánica y el electromagnetismo, hasta los más recientes ligados de la relatividad.*

*Introducimos los temas hablando inicialmente del espacio-tiempo y del universo, siendo algunos conceptos no tan intuitivos, lo que permite afrontar los temas posteriormente con mayor fluidez.*

*Presentamos los comienzos de la mecánica newtoniana y el movimiento de los cuerpos celestes según las leyes de Kepler, incluyendo el principio de mínima acción que nos permite describir el comportamiento dinámico de las partículas para llegar al desarrollo de Euler Lagrange de modo de disponer del formalismo básico.*

*Presentamos los comienzos de la teoría de la relatividad a partir de la concepción de Galileo y, usando las transformaciones de Lorentz, continuamos con los postulados y el desarrollo introducido de la relatividad especial de Einstein. Estudiamos, entonces, la dinámica relativista, la equivalencia entre masa y energía, el formalismo de cuadvectores, cantidades conservadas y algunos conceptos de simetrías. Se deja de hablar del espacio y del tiempo como entidades separadas y se pondrá de manifiesto como ambos estarán destinados a vivir en una única realidad, el espacio-tiempo.*

*Luego mencionamos algunas ideas de la cosmología y del universo, lo que nos permite, tras un pequeño apéndice matemático, afrontar alguna de las ideas centrales de la teoría de la Relatividad General en donde estudiamos, además, variedades, curvaturas, el tensor de energía-impulso, el tensor de Riemann y Ricci, los símbolos de Christoffel y las ecuaciones del campo de Einstein haciendo, posteriormente, una aproximación no relativista volviendo al punto de partida y, en última instancia, se introduce el concepto de constante cosmológica en las ecuaciones del campo de Einstein.*

*Finalmente, mencionamos el impacto de la física contemporánea en la ingeniería explicando cuestiones que tienen que ver con la propagación de ondas y transmisión de información mediante satélites y la importancia que tiene la Relatividad Especial y General sobre estas cuestiones, en particular las correcciones sobre el GPS.*

*A modo de suavizar los conceptos utilizados y terminologías, incluimos un glosario para facilitar la lectura y, como corolario de esta presentación se incluyen los comentarios recibidos de ingenieros y estudiantes de ingeniería que tuvieron acceso al texto de la tesis como así también el cuestionario que se les propuso a fin de evaluar la comprensión que pudieron adquirir de todos los conceptos expuestos.*

---

*El esfuerzo de este trabajo va dedicado a mi familia;  
madre, padre y hermanos.  
Ya que son un verdadero tesoro en las cambiantes vicisitudes del tiempo.*

*Atte. Matías E. Rastelli Arcangeli.*

---

## *Agradecimientos*

*Le agradezco enormemente a cada uno  
de los docentes que he tenido en la Universidad Nacional de  
La Plata por haber formado parte de mi aprendizaje  
durante el transcurso de la maestría.*

*En particular, mi mayor agradecimiento va dirigido al Dr. Carlos A. García Canal,  
a quien tuve el placer de tenerlo de docente y el honor de tenerlo como  
director de tesis, quien me enseñó y me sigue enseñando  
hasta el día de hoy sin recibir a cambio.*

---

# Índice general

<b>1. Espacio-Tiempos, Universo y Simetría</b>	<b>9</b>
1.1. Lectura preliminar . . . . .	10
1.1.1. Espacio-Tiempo . . . . .	10
1.1.2. Universo . . . . .	14
1.1.3. Simetría . . . . .	18
<b>2. Leyes de la Mecánica y del Movimiento</b>	<b>25</b>
2.1. Leyes de Newton . . . . .	26
2.2. Leyes de Kepler . . . . .	26
2.3. El Principio de Mínima Acción . . . . .	28
2.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	28
<b>3. Relatividad Especial</b>	<b>31</b>
3.1. Los comienzos de la Relatividad . . . . .	32
3.1.1. El Espacio y el Tiempo de Newton . . . . .	32
3.1.2. Concepción de relatividad según Galileo . . . . .	32
3.2. Principio de Relatividad de Galileo . . . . .	33
3.3. Relatividad Especial . . . . .	35
3.3.1. Postulados . . . . .	35
3.3.2. El experimento de Michelson-Morley . . . . .	35
3.3.3. Transformaciones de Lorentz . . . . .	37
3.3.4. Implicancias de las transformaciones de Lorentz . . . . .	41
3.4. Dinámica Relativista . . . . .	43
3.4.1. Cuadrivectores . . . . .	44
3.4.2. Generalización de la 2da Ley de Newton . . . . .	46
3.4.3. Energía cinética Relativista . . . . .	47
3.4.4. Equivalencia entre Masa y Energía . . . . .	48
3.4.5. Cantidad de Movimiento e Invariante de Energía . . . . .	49
<b>4. Aspectos generales de la Astronomía y la Cosmología</b>	<b>51</b>
4.1. Introducción . . . . .	52
4.2. Historia: Propulsores de la Astronomía . . . . .	53
4.3. Ideas generales de la Cosmología . . . . .	59

---

4.4. Curva de Rotación . . . . .	60
4.5. Fondo Cósmico de Microondas . . . . .	62
4.5.1. Observacional . . . . .	62
4.5.2. Dependencia direccional y el universo temprano . . . . .	63
4.5.3. Datos obtenidos del satélite WMAP . . . . .	64
4.5.4. Proceso expansivo . . . . .	64
4.5.5. Imágenes capturadas por el COBE y WMAP . . . . .	66
4.6. Materia Oscura . . . . .	67
<b>5. Análisis Tensorial . . . . .</b>	<b>69</b>
5.1. Tensor útiles . . . . .	70
5.1.1. Tensor Delta de Kronecker . . . . .	70
5.1.2. Tensor de Levi-Civita . . . . .	70
5.1.3. Tensores isótropos: $\delta_{ij}$ y $\epsilon_{ijk}$ . . . . .	70
5.2. Propiedades de vectores de 4-D . . . . .	71
5.2.1. Base del espacio de vectores . . . . .	72
5.2.2. Transformación de vectores base . . . . .	73
5.3. Estructuras sobre la variedad . . . . .	73
<b>6. Introducción a la Relatividad General . . . . .</b>	<b>77</b>
6.1. Principio de Equivalencia . . . . .	78
6.2. Espacio-Tiempo de Minkowski . . . . .	79
6.3. Curvatura del Espacio-Tiempo . . . . .	80
6.3.1. Coordenadas localmente inerciales . . . . .	81
6.3.2. Curvatura intrínseca de una variedad . . . . .	82
6.4. Tensor de Energía-Impulso . . . . .	83
6.4.1. Tensor de Energía-Impulso para un Fluido Real . . . . .	85
6.5. Símbolos de Christoffel . . . . .	86
6.5.1. Símbolos de Christoffel en un espacio euclídeo . . . . .	87
6.5.2. Símbolos de Christoffel derivados del tensor métrico . . . . .	88
6.6. Tensor de curvatura de Riemann . . . . .	89
6.7. Tensor de Ricci y Curvatura escalar . . . . .	90
6.8. Las ecuaciones de Einstein . . . . .	92
6.8.1. El límite para el campo $\Phi$ débil . . . . .	96
6.8.2. Constante cosmológica . . . . .	97
<b>7. Aplicaciones en la Ingeniería . . . . .</b>	<b>99</b>
7.1. El electromagnetismo de Maxwell . . . . .	100
7.1.1. Las Leyes de Maxwell . . . . .	101
7.2. Cantidades Conservadas . . . . .	105
7.3. Vector de Poynting . . . . .	105
7.4. Potenciales electromagnéticos e invariancia de Gauge . . . . .	106
7.5. Electrodinámica y Relatividad . . . . .	109

---

7.5.1. Las Ecuaciones de Maxwell en su forma covariante . . . . .	111
7.6. Ecuaciones de onda para un medio indefinido . . . . .	112
7.6.1. Constante de propagación $\gamma$ . . . . .	113
7.7. Potenciales Retardados . . . . .	114
7.8. Potenciales generados por cargas puntuales . . . . .	117
7.8.1. Potenciales de Liénard -Wiechert . . . . .	117
7.8.2. Campos asociados a cargas puntuales móviles . . . . .	119
7.9. Radiación emitida por un dipolo eléctrico . . . . .	121
7.10. La física y la ingeniería detrás del GPS . . . . .	125
7.10.1. Funcionamiento básico del GPS . . . . .	126
7.10.2. Localización del receptor en el plano . . . . .	126
7.10.3. La relatividad general y el GPS . . . . .	128
7.10.4. Conclusiones . . . . .	132
<b>8. Apéndice</b>	<b>133</b>
8.1. Constantes Universales . . . . .	134
8.2. Otras constantes útiles . . . . .	135
8.3. Unidades Electromagnéticas . . . . .	136
8.4. Identidades Vectoriales . . . . .	137
8.5. Simetrías e identidades . . . . .	138
8.6. Sistemas de Coordenadas . . . . .	139
<b>9. Glosario</b>	<b>141</b>
9.0.1. A . . . . .	142
9.0.2. B . . . . .	142
9.0.3. C . . . . .	142
9.0.4. D . . . . .	143
9.0.5. E . . . . .	144
9.0.6. F . . . . .	145
9.0.7. G . . . . .	145
9.0.8. H . . . . .	146
9.0.9. I . . . . .	146
9.0.10. L . . . . .	147
9.0.11. M . . . . .	147
9.0.12. N . . . . .	148
9.0.13. O . . . . .	148
9.0.14. P . . . . .	148
9.0.15. S . . . . .	148
9.0.16. T . . . . .	149
9.0.17. U . . . . .	149
9.0.18. V . . . . .	150
<b>10. Bibliografía y Referencias</b>	<b>151</b>

---

<b>11. Análisis del Impacto de la Tesis</b>	<b>155</b>
11.1. Presentación de la encuesta . . . . .	156
11.2. Consigna . . . . .	156
11.3. Resultados . . . . .	168
11.4. Conclusiones . . . . .	169
<b>12. Conclusiones Generales</b>	<b>171</b>
12.1. Experiencias . . . . .	172
12.2. Impacto . . . . .	172
12.3. Motivación . . . . .	172

# Capítulo 1

## Espacio-Tiempos, Universo y Simetría

“LAS ECUACIONES DE LA FÍSICA SON  
COMO LOS POEMAS DE LA NATURALEZA.  
SON CORTAS Y ESTÁN ORGANIZADAS  
DE ACUERDO A CIERTOS PRINCIPIOS,  
Y LAS MÁS BELLAS TRANSMITEN LAS  
SIMETRÍAS OCULTAS DE LA NATURALEZA.”

## 1.1. Lectura preliminar

### 1.1.1. Espacio-Tiempo

El espacio-tiempo constituye el escenario donde ocurren los fenómenos de la Naturaleza. Se trata de la base de toda descripción física. Arthur Eddington (1882-1944) se propuso llevar a cabo un experimento para estudiar el cielo durante el eclipse solar que ocurrió el 19 de mayo del 1919. Su propuesta era verificar las ideas contenidas en la Teoría General de la Relatividad de Albert Einstein (1879-1955) que había sido presentada en su forma final en 1915. La experiencia consistía en estudiar imágenes del cielo, detrás del sol durante el eclipse, tomando fotografías en dos puntos cercanos al ecuador para aumentar la precisión. Cuando finalmente se pudieron estudiar las imágenes, se consiguió confirmar que la Teoría de la Relatividad era correcta.

Ese hecho constituye un hito fundamental en la evolución de las ideas físicas y filosóficas, ya que a partir de esta observación, la noción de tiempo absoluto que había acompañado a la humanidad por más de cinco mil años, comenzaba a desaparecer, debía desaparecer. Detrás de las ideas de la relatividad formulada por Einstein está implícito el hecho de que el espacio y el tiempo dejan de ser entidades independientes. Desaparecen como magnitudes físicas individuales para conformar una nueva entidad: el espacio-tiempo. El matemático Hermann Minkowsky (1864-1909), creador de una geometría ligada a los requerimientos de la relatividad en lo referente a tratar conjuntamente espacio y tiempo escribió en 1909: “a partir de ahora el espacio en sí mismo y el tiempo en sí mismo se hunden por completo en las sombras y sólo una unión de ambos conserva una nueva existencia propia”.

El espacio se entiende entonces como un lugar en el cual podemos ordenar los objetos. Resulta claro que para hablar de espacio se necesita primero incorporar y aceptar la idea de objeto material, que es un concepto previo. Las leyes que rigen las relaciones posibles entre cuerpos materiales, es lo que nos va a enseñar cuál es la estructura del espacio.

Admitimos que los razonamientos y las imágenes que podemos construir de este espacio son afirmaciones verdaderas, lo cual no es evidente. Le damos contenido objetivo, como si existiese realmente. A partir de este a priori del espacio que tenemos construido en la esfera del pensamiento, surgen las entidades de punto, recta y plano. Mencionamos de inmediato que la idea de punto no es trivial. La idea de punto lleva a admitir que uno es capaz de referirse a un lugar en el espacio que no ocupa espacio. La idea de recta en cuanto una asociación de puntos que se extiende indefinidamente, tampoco es trivial ya que incluye la noción de indefinido o infinito. Lo mismo vale, por supuesto, para el concepto de plano. Estas ideas no son para nada intuitivas en cuanto a su posibilidad de ligarlas a la experiencia cotidiana.

La idea de tiempo tiene que ver con un orden sucesivo, con una secuencia. Nuestras experiencias están ordenadas una luego de la otra. Este orden secuencial es la idea más elemental de tiempo. Es decir, si realizamos una experiencia en un determinado momento como puede ser el análisis de un movimiento o alguna percepción, se está experimentando lo que es el ahora, en este instante. Digamos que se está tomando contacto con el mundo externo, con los objetos, en un dado instante. Pero, a partir de la memoria, se pueden recordar experiencias anteriores y armar de esa manera una secuencia donde hay experiencias previas, está el presente y habrá experiencias posteriores. Se percibe como si el tiempo fuese un continuo que fluye ordenando todas las secuencias de experiencias. Además tiene carácter unidimensional y de alguna manera es la variable que ordena el cambio.

Pasamos ahora a recorrer los conceptos de la Teoría de la Relatividad a partir del análisis sobre qué entendemos por relatividad en relación con las ideas de referencia. Cuando decimos que algo está situado a la derecha o a la izquierda, no transmitimos información ya que la respuesta es un concepto relativo a nuestra ubicación. La misma situación se presenta con la condición de arriba y abajo. Es un concepto relativo. En este último caso debemos recordar que antes de Colón, no había dudas al respecto ya que la Tierra era considerada plana. Más aún, preguntar dónde se encuentra un objeto y no decir nada más carece de sentido. Es imprescindible en todos los casos agregar la información respecto de. También podemos preguntarnos si el movimiento entendido como cambio de posición cuando transcurre el tiempo, es un concepto absoluto. Es nuevamente una pregunta sin respuesta porque está mal formulada. Más aún, no podemos siquiera asegurar sin más que una trayectoria es cerrada o abierta. También nos podríamos preguntar si es posible hablar de reposo. Estamos conscientes de que la aplicación de fuerzas en general causa movimiento (en realidad cambios del estado de movimiento). Supongamos entonces que sobre un cuerpo no actúan fuerzas. ¿Será que es posible observarlo en reposo, en lo que llamaríamos el laboratorio en reposo?.

En general, las propiedades del movimiento observadas en otro laboratorio que se mueve respecto del original, difieren del reposo. Sin embargo, si el movimiento de un laboratorio respecto de otro es uniforme (con velocidad constante) las leyes del movimiento serán las mismas. La idea de reposo de Galileo como así también el estado natural de los cuerpos (atribuida a Aristóteles) parece perderse definitivamente. Esta es una propiedad asombrosa de los laboratorios que se mueven unos respecto de otros con movimiento rectilíneo y uniforme. Cada miembro de este conjunto de laboratorios resultan equivalentes para la descripción del movimiento de los cuerpos. Su importancia reside en el hecho que ellos no influyen en la conducta física de los cuerpos en movimiento. En ellos las leyes del movimiento toman la forma más simple, esto hace la aparición una de las más importantes leyes de la Naturaleza. Es el Principio de Relatividad del Movimiento de Galileo.

---

El movimiento descrito en cualquier sistema inercial está regido por las mismas leyes. Las ideas del espacio y de tiempo se relacionan cuando se incorpora el análisis del movimiento de los cuerpos. Al estudiar el movimiento se toma al espacio como base de descripción, pues los cuerpos al moverse cambian de posición en ese espacio y lo hacen durante el transcurso del tiempo. Aparece entonces la idea clara de espacio y de tiempo, dando lugar al escenario donde ocurren estos procesos de cambio. Cuando se describen estas experiencias, se lo hace a partir de la idea de espacio y de tiempo heredada de la cultura griega: un espacio plano tal como se conocía desde Euclides. En ese espacio se ubican los objetos y se los acompaña de un reloj que marca el tiempo definiendo una secuencia absoluta común a cualquiera de los observadores posibles. Con esos elementos se describen los movimientos de los cuerpos. Así, primero Galileo Galilei (1564-1642) y luego Isaac Newton (1643-1727) establecen las leyes físicas de la Mecánica. De esas leyes queremos recordar la de aditividad de las velocidades. Esta enseña cómo se suman las velocidades de móviles que se mueven a su vez respecto de otros móviles. Recordamos el caso del bote que recorre un río mientras el pasajero camina sobre el bote. La persona que observa desde la orilla va a percibir que el pasajero del bote se está moviendo con una velocidad que es la suma de la velocidad del bote respecto de la orilla más la velocidad con que aquél se desplaza sobre el bote. Esto es evidente pues la distancia total recorrida por el pasajero vista por el observador desde tierra, es la suma de la distancia que recorrió el bote más la que el pasajero caminó sobre el bote, todo ello en el mismo lapso de tiempo. Pero cuidado, esta conclusión surge de presuponer que el tiempo que transcurre para el hombre que está en el bote es exactamente el mismo que el del observador en tierra. Es decir, que hay una noción de tiempo absoluto que rige la evolución en el Universo de manera idéntica para todos los observadores, independientemente del estado de movimiento. Esta idea sobrevivió hasta fines del siglo XIX, cuando aparece un conflicto en el estudio del comportamiento de la luz.

Tradicionalmente la luz era considerada como un fenómeno de propagación instantánea. Recién, alrededor del año 1700, los científicos se dieron cuenta de que un rayo luminoso tardaba un cierto tiempo en llegar de la fuente al objeto iluminado. Comenzó entonces la preocupación por describir con mayor precisión el fenómeno luminoso y determinar cómo está constituida la luz, sobre qué medio se mueve, qué características tiene, etc. A fin de encontrar respuestas a estos interrogantes se realizaron una serie de experimentos. Uno de ellos, de Albert Michelson (1852-1931) y Edward Morley (1838-1923), de fines del siglo XIX, indagaba acerca del soporte sobre el cual la luz se movía e intentaba caracterizar el llamado éter. El resultado fue sorprendente, la luz se propaga con la misma velocidad en cualquier sistema de referencia inercial. A diferencia de lo que pasa cuando un hombre camina en un bote, donde su velocidad cambia si se la mide desde el bote o desde la orilla. Para el que observa en el bote o para el que observa en tierra, la velocidad es ciertamente diferente. A la luz no

le ocurre esto. El resultado experimental fue que su velocidad de propagación es la misma, cualquiera sea el sistema de referencia o el estado de movimiento de la fuente.

El análisis teórico de los resultados de Michelson y Morley realizado por Albert Einstein (1879-1955) en 1905 condujo a que la velocidad de la luz es constante, independientemente del observador. La consecuencia inmediata de esta propiedad es la no existencia del éter. De existir este éter, el movimiento relativo de los observadores respecto del mismo cambiaría la velocidad resultante de la luz. Debido a esta propiedad de la luz, las leyes de movimiento y de la física en general, debían ser modificadas. Dichas leyes son diferentes a las expresadas por Newton. El tiempo no es absoluto. En efecto, un tiempo absoluto, igual para todo observador, no es compatible con la constancia de la velocidad de la luz.

La construcción de la Teoría de la Relatividad especial postula la equivalencia entre sistemas inerciales en cuanto a las leyes de movimiento, asumiendo que la velocidad de la luz es la misma en todos ellos. Al ser la velocidad de la luz constante e independiente del observador, entonces una de las nociones que se debe revisar es la simultaneidad. La observación de dos eventos que ocurren simultáneamente, como por ejemplo la llegada al unísono de dos objetos en caída libre a la tierra, es válida para un dado observador. Otro observador, en movimiento relativo respecto del anterior, detectará que uno de los objetos llega a tierra después que el otro. No observará la llegada simultánea pues ésta simultaneidad es relativa al observador: El concepto de simultaneidad no es universal porque no hay un tiempo absoluto.

La experiencia es muy simple: imaginemos un vagón (muy) largo donde exactamente en el punto medio hay una fuente de luz que se enciende y emite rayos en todas direcciones, especialmente hacia la parte trasera y delantera del vagón. Como hemos entendido a partir de Einstein, la velocidad de la luz es la misma si se dirige hacia la parte de adelante o hacia la de atrás del vagón. Debido a que la fuente está ubicada justamente en el medio del vagón, va a tardar lo mismo en llegar a los dos extremos. Cuando la luz llega supongamos que excita un sensor fotoeléctrico que, por ejemplo, abre las puertas del vagón. Entonces un observador que se encuentra parado en el medio del vagón va a ver que las dos puertas se abren simultáneamente. Sin embargo, otro observador, esta vez ubicado sobre tierra, fuera del vagón, verá sin duda que se enciende la luz y esta empieza a viajar hacia atrás y adelante con la misma velocidad; pero como el tren se mueve, la luz llegará antes a la puerta trasera ya que deberá recorrer menor distancia a la misma velocidad. Por ello el observador externo detectará que la puerta del frente se abre después que la trasera y no de manera simultánea.

### 1.1.2. Universo

El Universo, todo el espacio-tiempo en el que existimos y toda la energía y la materia en él contenida, ha sido y es motivo de curiosidad central para la humanidad. Esta inquietud, origen de la actitud científica, nos lleva inmediatamente a preguntarnos sobre el origen, evolución, estado actual y destino del mismo. Estas son cuestiones de siempre, surgidas inevitablemente al contemplar las estrellas y comprender la inmensidad del espacio que nos rodea. Ciertamente estas preguntas también se ligan fuertemente a la filosofía y a la religión. Aquí plantearemos y daremos respuesta a las preguntas que tienen sentido desde la Ciencia y que tienen, o pueden llegar a tener en el futuro, respuestas científicas.

Hagamos primero un breve catálogo con las preguntas más inmediatas. - ¿cuán lejos están las estrellas? - ¿el Universo es finito o infinito? - ¿dónde termina el Universo si tiene fin? - ¿es posible detectar esa eventual frontera? - ¿es eterno? - ¿si no lo es, qué edad tiene? - ¿el Universo es estático o crece? - en tal caso, ¿seguirá creciendo siempre? - ¿aumenta el número de estrellas? - ¿se prevén cataclismos? - ¿cuál es el destino final del Universo? ...

La visión que el hombre se hizo del Universo a lo largo de la historia, ha tenido siempre un horizonte móvil, empujado permanentemente por la curiosidad. Este proceso puede compararse con la exploración del microcosmos, claro que esta vez en el sentido de tamaños crecientes. Desde Ptolomeo (~130 a.c.) y por 16 siglos reinó el geocentrismo, ya que la Tierra era considerada el centro del Universo. Estas ideas erróneas fueron soportadas fuertemente desde la religión y su concepción del hombre a semejanza de un dios. Hace sólo cinco siglos, Copérnico (1473-1543) sostuvo en cambio que “cerca del Sol está el centro del Universo”. Así nació la teoría heliocéntrica del Universo. Vale recordar que en 1616, el papa Pablo V calificó a las ideas copernicanas como contrarias a las escrituras. Copérnico estaba equivocado, pero fue criticado con argumentos erróneos.

Hoy nuestra visión del Universo ha cambiado nuevamente. Las observaciones experimentales nos han permitido concluir que ni la Tierra ni el Sol poseen una posición central. En realidad el Universo carece de centro. Esta afirmación está contenida en el principio cosmológico que sostiene que en un dado instante, el Universo se presenta igual a todo observador, cualquiera sea su ubicación. Disponemos actualmente de telescopios, cámaras, espectrógrafos, sensores satelitales, fotómetros, etc, que detectan y analizan la radiación cósmica de diferentes tipos que viajan en el Universo. Estos instrumentos hacen posible la observación y determinación de propiedades de las galaxias y otros objetos estelares distantes.

Para poder imaginar los tamaños y las distancias en juego en el Universo, debemos recordar algunas cantidades características. Por ejemplo, las distancias a escalas galácticas y extragalácticas se expresan en años-luz. Esta es la distancia que recorre la luz en un año. Recordando que la velocidad de la luz es cercana a los  $300.000 \text{ Km/seg}$  (trescientos mil kilómetros por segundo), se entiende que la luz podría dar siete vueltas a la tierra en un segundo. La distancia Tierra-Sol es del orden de 8 minutos luz (150.000.000 de kilómetros), la estrella más cercana a la Tierra después del Sol es Alfa-Centauro que se encuentra a 4 años-luz de nosotros. Es decir, cuando observamos a esa estrella estamos recibiendo la luz que ella produjo hace 4 años. Una unidad también útil a estas escalas es el parsec = 3,3 años-luz.

La Tierra junto al sistema solar se encuentra dentro de una galaxia de tipo espiral llamada Vía Láctea. Esta galaxia contiene estrellas y demás objetos celestes cuya masa es del orden de cien mil millones de masas solares. Respecto de la Vía Láctea vale la pena recordar la frase de Isaac Asimov: "Esta es la galaxia más difícil de observar ya que estamos inmersos en ella, mientras que a las otras galaxias podemos verlas desde afuera. Además estamos lejos del centro de la galaxia, vivimos en un brazo en espiral lleno de polvo cósmico. En otras palabras, habitamos un departamento bajo los suburbios de una ciudad sumergida en la polución".

Existe un grupo local de galaxias próximas a la Vía Láctea. Entre ellas se destacan las Nubes de Magallanes ubicadas a unos 170.000 años-luz. Este grupo forma parte a su vez de un super-grupo local, asociación de grupos de galaxias, con centro en Virgo, a veinte millones de parsecs de distancia (setenta millones de años luz). Más allá del super-grupo, la materia del Universo se presenta como una gran esponja de galaxias con vacíos de tamaños de alrededor de 100 millones de parsecs y la presencia de filamentos de materia. Resulta realmente impresionante comprender que hoy somos capaces de observar hasta distancias de tres mil millones de parsecs, esto es diez mil millones de años-luz.

El Universo se expande. Hubble en 1920 hizo un descubrimiento fundamental para la Cosmología, la disciplina científica que se encarga de estudiar al cosmos como un todo, al detectar el alejamiento mutuo de las galaxias. Hoy sabemos que las 28.000 galaxias cuyo espectro ha sido estudiado (de los 5 millones de galaxias catalogadas) se alejan todas de todas y lo hacen tanto más rápido cuanto más lejos se encuentran. Hay una relación lineal entre la velocidad de alejamiento y la distancia a la que se encuentra la galaxia. Este alejamiento se detecta porque la luz que proviene de cada galaxia experimenta un corrimiento de frecuencia (de color) hacia el rojo. A partir de la determinación del alejamiento de las galaxias se puede retrotraer el tiempo y de esa manera intentar reconstruir la historia del Universo.

Es claro entonces que el Universo pasó previamente por etapas de mayor y mayor concentración de materia y de energía. Sobre la hipótesis de homogeneidad e isotropía del Universo y la validez de la ley de Hubble durante toda la evolución temporal, se puede entender al Universo como un gas en expansión que al hacerlo se enfría. Inversamente, se puede extrapolar hacia el pasado y de esa manera acercarnos hacia el estado inicial, cuando todo estaba concentrado. Se produjo entonces el Big-Bang, la singularidad a partir de la cual comienza la expansión. Las determinaciones experimentales más recientes indican que la edad de Universo es del orden de trece mil setecientos millones (13.700.000.000) de años. Este dato lo conocemos con una precisión de cien millones de años.

La física del proceso de evolución es bien conocida a partir de los  $10^{-12}$  (0,000000000001) segundos posteriores al de la “bola de fuego” primordial. A partir de allí, hemos podido reconstruir la historia del Universo. Entre los  $10^{-43}$  segundos y los  $10^{-34}$  segundos debió haber una “sopa” cómica formada por partículas elementales altamente energéticas a una temperatura del orden de  $10^{+30}$  grados. Hasta  $10^{-30}$  de segundos se produce un rápido crecimiento de la entropía con el consecuente aplanamiento del espacio, que es llamado período inflacionario. En los instantes siguientes, hasta  $10^{-6}$  segundos y a temperaturas del orden de  $10^{+13}$  grados se forman los protones y neutrones al ligarse los quarks por medio de los gluones. La nucleosíntesis o formación de los núcleos atómicos livianos ocurre 1 segundo después del Big-Bang, cuando la temperatura ya había descendido a  $10^{+10}$  grados. Posteriormente se forman los átomos cuando los núcleos ligan a tantos electrones como el número de protones que poseen. En ese momento la materia se hace eléctricamente neutra y por esto la radiación electromagnética formada por los fotones, sensible a la carga eléctrica, se desacopla, evoluciona de manera aislada, y queda entonces como fósil de aquella época. Esta situación se produjo 170.000 años después del Big-Bang cuando “la sopa” ya estaba tibia.

Trece mil millones de años más tarde, en 1965, esa radiación fósil de fondo fue detectada por Penzias y Wilson. Esta radiación había sufrido la expansión del Universo y el consecuente corrimiento al rojo. Es muy homogénea, sus fluctuaciones son menores a un diez milésimo de su valor. La temperatura característica de la “radiación de fondo” como se la llama, es de 2,74 grados (Kelvin). Es claro que para que se produzca la formación de galaxias, el Universo no pudo ser absolutamente homogéneo. Es imprescindible la presencia de inhomogeneidades. Desde 1992, primero con el satélite llamado COBE y recientemente con el WMAP, se han detectado inhomogeneidades térmicas en el Universo respecto de aquellos 2,74 grados, del orden de 1 parte en  $10^5$ , suficientes como para desequilibrar localmente la atracción gravitatoria y dar lugar a concentraciones de materia que terminan formando las galaxias.

---

La próxima pregunta que naturalmente podemos hacernos se refiere al destino del Universo: cuál es su evolución de aquí en más. Esta depende críticamente de la densidad de masa en el Universo, o mejor dicho, de la relación entre la densidad de masa del Universo y la llamada densidad de masa crítica. Esta última, ligada a la constante de Hubble, define la situación futura del Universo. En efecto, si la relación de densidades mencionada es mayor que 1, el Universo al evolucionar colapsará a un punto. Si por el contrario esa relación es menor que 1 se producirá una expansión indefinida. ¿Cuánto vale entonces la relación de densidades?. Las determinaciones experimentales ligadas a corrimientos espectrales y la única solución natural estable de las ecuaciones de Einstein indican que la densidad del Universo debe ser muy próxima a la densidad crítica, de modo que la relación es prácticamente 1. En otras palabras, el Universo es crítico ya que las dos fuerzas que compiten, la de expansión originada en el Big Bang y la de atracción gravitatoria entre masas, se compensan casi exactamente. Sin embargo, la densidad de materia visible no supera algunas centésimas de la densidad crítica. De modo que falta detectar alrededor del 90 % de la materia del Universo.

Recordando que materia y energía son esencialmente la misma cosa, se ha podido concluir que alrededor del 70 % de ese faltante, más que materia oscura (no visible) es energía oscura (no detectable). Con la relación de densidades menor o cercana a 1, como parecen indicar las diferentes evidencias que disponemos, el escenario más probable para el destino del Universo es el de una expansión eterna. En ese caso la densidad de materia seguirá disminuyendo al disponer la misma cantidad de masa en un mayor volumen. Consecuentemente el Universo se enfriará, las estrellas se apagarán y la única fuerza activa será la gravitatoria. La materia terminará en forma de agujeros negros (concentración singular elevadísima de materia en regiones espaciales muy pequeñas), otros objetos densos y remanentes de partículas elementales y radiación surgidas del colapso gravitatorio. El Sol ya frío, escapará de la Vía Láctea y errará por el Universo arrastrando a la Tierra. El futuro previsible para dentro de unos  $10^{100}$  años (muchos de verdad...) es la sistemática formación de agujeros negros devorando materia y de los que escapa solamente la llamada radiación de Hawking de tipo térmico, es decir, sin ninguna información útil.

### 1.1.3. Simetría

Las consideraciones de simetría siempre proveyeron a la ciencia de herramientas poderosas y muy útiles, más aún, la simetría se ha transformado hoy en la base de la formulación teórica de las leyes físicas que rigen las interacciones fundamentales de la Naturaleza. En lugar de centrar la discusión sobre las “partículas elementales” y sus interacciones, hoy deberíamos referirnos en primer lugar a las “simetrías fundamentales”.

La presencia de simetrías implica la imposibilidad de observación de ciertas magnitudes y correspondientemente garantiza leyes de conservación (magnitudes físicas que no cambian con el decurso del tiempo) y reglas de selección (que prohíben la realización de ciertos procesos). En consecuencia, cuando un, a priori, “no-observable” se torna realmente observable, estamos en presencia de la violación, el no cumplimiento estricto, de la correspondiente simetría, lo que llamamos una asimetría. El significado original de simetría se relaciona con una relación de conmensurabilidad. Platón en el *Timeo* dice “aquella conexión que con los elementos que conecta produce la mayor unidad posible y al mismo tiempo genera una proporción (= simetría) que es la más bella”. Esta frase nos indica que simetría estaba, desde sus orígenes, ligada al concepto de armonía, unidad y belleza.

A poco de andar podemos distinguir entre simetrías geométricas y simetrías físicas. Las primeras se refieren a las simetrías de las formas de los objetos en el espacio, en tanto que el calificativo de físicas singulariza a aquellas que tienen que ver con las leyes de la Naturaleza. Una simetría geométrica en el espacio, o mejor, una transformación de simetría espacial de un objeto geométrico es, matemáticamente hablando, una isometría que lleva al objeto a una situación indistinguible de sí mismo, de modo que el objeto posee una invariancia. Es decir, una operación que deja al objeto invariante cuando partes de sus componentes iguales son intercambiadas según una regla dada.

El conjunto de transformaciones de simetría como las rotaciones, traslaciones o reflexiones conforma en cada caso una estructura matemática llamada grupo, con toda las implicaciones que esta identificación conlleva. La definición de simetrías en términos de grupos permite imaginar las operaciones no solamente sobre figuras matemáticas sino también sobre objetos abstractos como son las expresiones matemáticas.

Por ello, se habla de la presencia de simetrías de las leyes de la Naturaleza, implicando que podemos hacer algo (una operación) a una ley física, o a nuestra representación formal de la ley, sin que se provoquen cambios en la forma de la ley. Es decir, sus efectos no conducen a alteraciones de la forma matemática que expresa un dado comportamiento de la Naturaleza.

Más formalmente, una transformación de simetría de una ley física es un cambio de las variables dinámicas y/o de las coordenadas en términos de las cuales se expresa la ley, de modo que las ecuaciones correspondientes conservan la forma cuando son expresadas en las nuevas variables y coordenadas. Así surge la propiedad de covariancia de las leyes físicas.

El análisis teórico de las simetrías en la Física, podría partir de clasificarlas ahora en espacio-temporales e internas. Las primeras se corresponden con transformaciones que operan sobre las coordenadas espacio-temporales -diferentes situaciones de observación-, en tanto que las internas afectan sólo a las variables dinámicas o a los operadores -diferentes cualidades de los observables-. En general, estas últimas no tienen conexión con el espacio-tiempo y son denominadas globales (la misma en cualquier punto). Cuando a los parámetros que identifican la transformación interna se los hace depender del espacio-tiempo, el caso llamado local, la simetría se denomina de “gauge”.

Para llegar a una comprensión física de las simetrías y asimetrías, con el correspondiente análisis de sus consecuencias, vamos a comenzar recordando conceptos básicos ligados a las partículas y a sus interacciones. Partiremos del innegable “punto de partida” que nos provee Newton al decir: “Las partículas más pequeñas de la materia pueden adherirse por atracciones fuertes para componer partículas mayores con una “virtud” más débil” (y así siguiendo...). En la época de Newton la única “virtud” conocida era la gravitacional, la que adquirió precisamente con el carácter universal. Esta universalidad incluye también, gracias a Einstein y su ecuación  $E = mc^2$ , a la energía (la luz). Las otras “virtudes” que hoy conocemos con el nombre genérico de cargas, son la fuerte, la electromagnética y la débil. Ellas no presentan la universalidad de la gravitatoria ya que poseen gran selectividad. En particular, con referencia a las interacciones fuertes, toda la materia es clasificable en quarks que la sufren y leptones que no la sienten. La electromagnética nos permite distinguir entre materia eléctricamente cargada y neutra. Finalmente la interacción débil separa básicamente la izquierda de la derecha. Esta selectividad hace natural la introducción del concepto de carga que mencionamos, para rotular y cuantificar “virtudes”. Como características de las partículas podemos decir entonces que poseen carga fuerte, electromagnética y débil. Este concepto de carga tiene además importancia desde el punto de vista dinámico ya que las diferentes fuerzas físicas están determinadas por la magnitud de esas cargas.

En otro orden de cosas, la presencia de una simetría está directamente ligada a una ley de conservación, es decir, algo que no cambia cuando evoluciona en el tiempo. Y una tercera propiedad que emerge de la presencia de una simetría es, como dijimos, la no observabilidad. De hecho, en la base de todos los principios de simetría subyace la suposición de que es imposible observar ciertas cantidades básicas, que amenudo son llamadas no-observables.

Hay ciertamente muchos ejemplos, de los cuales mencionamos sólo la indistinguibilidad (no observabilidad de diferencias) de las partículas idénticas ligada a la simetría de permutación entre ellas o la condición de no-observable de la velocidad absoluta relacionada con la simetría Lorentz de la Relatividad. Esta propiedad de no observabilidad nos indica de inmediato que en muchos casos las asimetrías son necesarias a fin de comprender la observación empírica, cuando se da, de los no-observables correspondientes, garantizados por invariancias.

Podemos ahora coleccionar un conjunto de preguntas que nos ayudan a repensar los conceptos claves ligados a las simetrías. Comenzamos preguntando a quiénes están asociadas las simetrías y nos encontramos con que ellas pueden ser de las ecuaciones que rigen el movimiento, de las condiciones de contorno que especifican dónde y desde cuándo evolucionan o de las soluciones de esas ecuaciones. Luego podemos preguntarnos a qué escala se presentan. Allí responderíamos a escala microscópica o macroscópica, a bajas o altas energías, a bajas o altas temperaturas, etc.. La pregunta a qué nivel de descripción física están presentes, tiene como respuestas el clásico o el cuántico. En tanto que si preguntásemos sobre su calidad responderíamos exacta, aproximada o rota. En este último caso podremos diferenciar entre la ruptura explícita, simetría anómala y la ruptura espontánea o simetría latente.

Analizamos un poco más estas últimas posibilidades mencionadas. La ruptura explícita surge de la presencia en el sistema de una parte manifiestamente no invariante. La ruptura anómala se presenta cuando ciertas simetrías de la teoría a nivel clásico, no mantienen su presencia cuando la teoría es cuantificada, es decir, cuando se la adapta al nivel atómico. De esa manera, aparecen las llamadas anomalías que tienen consecuencias nefastas, impidiendo la realización del proceso formal que da sentido a las teorías microscópicas.

Finalmente se puede estar en presencia de una ruptura espontánea, o como preferimos decir, que la simetría se manifieste en forma latente, cuando las soluciones físicas poseen menor simetría que las ecuaciones de movimiento. Esta situación está caracterizada por su aparición espontánea y la pérdida de la simetría no es total ya que ella queda escondida, o latente, en las ecuaciones. En efecto, las varias soluciones no simétricas están conectadas entre ellas mediante la operación de simetría. En algún sentido, la simetría latente es una manifestación platónica por cuanto la realidad observada refleja de manera imperfecta a una “realidad” más simétrica representada por las ecuaciones.

Vamos a concentrarnos ahora en las simetrías físicas ligadas a operaciones discretas. Comenzaremos recordando la paridad  $P$ , o reflexión espacial, que establece que el espacio no tiene orientación intrínseca y que comúnmente se menciona como simetría izquierda-derecha. En efecto, existiendo  $P$  como simetría, no son observables ni la derecha ni la izquierda absolutas: el metro patrón mide un metro si lo medimos de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. También Alicia es igual a ambos lados del espejo.

Ligada a la presencia de antimateria surge la simetría  $C$  de conjugación de la carga. Debido a esta simetría, “antifísicos” de “antiplanetas” realizando experiencias iguales a los físicos en nuestro planeta deben deducir iguales leyes. La antimanzana del antiárbol también le produce un chichón a antiNewton. Por ello, si no hay contacto materia-antimateria resulta a priori imposible saber de qué estamos hechos.

Parece de interés ahondar brevemente sobre este punto recordando que la Mecánica Cuántica junto a la Relatividad nos hicieron el regalo de la antimateria: correspondiente a cada partícula existe una antipartícula. Como ya dijimos, las antipartículas poseen igual masa, igual vida media pero cargas opuestas a las partículas.

Finalmente, mencionamos la validez de un teorema fundamental, el teorema  $CPT$  que establece que, bajo condiciones muy generales de simetría (llamada de Lorentz-Poincaré), dentro del marco de la Mecánica Cuántica Relativista, la simetría producto de las tres operaciones discretas mencionadas,  $CPT$ , que convierte evidentemente estados iniciales de partículas entrantes en estados finales de antipartículas salientes, es exacta. En otras palabras, si un sistema pasa de un estado inicial a uno final y recordamos que  $C$  transforma una partícula en una antipartícula,  $P$  se corresponde con la inversión de la parte espacial del impulso y  $T$  implica el intercambio de los estados inicial y final con la correspondiente inversión del sentido de los vectores de impulso y espín que caracterizan al estado, concluimos que partículas entrantes son absolutamente equivalentes a antipartículas salientes.

Sobre la base de los conceptos introducidos nos referiremos ahora a la problemática de la materia y la antimateria que puede parafrasearse en la pregunta de por qué estamos aquí. En principio, los filósofos analizan y ponderan el proyecto humano y su destino. Los científicos simplemente quieren saber por qué todo tiene composición material. Debemos percibir que, en efecto, esta no es una pregunta trivial ya que a priori no hay buenas razones para que exista materia.

En efecto, la bien conocida, y a veces vituperada, ecuación de Einstein  $E = mc^2$ , debe leerse diciendo que energía es igual a materia más antimateria. En efecto, allí aparece la energía que no tiene rótulos de carga, en tanto, como ya dijimos, la materia está caracterizada por esas cargas que la identifican como “virtudes”. Consecuentemente, a partir del Big Bang debemos esperar que en el Universo el número de partículas sea igual al número de antipartículas.

Los ingredientes de la “sopa primordial” eran 56 % de quarks-antiquarks, 16 % de gluones-antigluones, 9 % de partículas tipo electrón y positrón (leptones cargados), 9 % de W y Z, 5 % de neutrinos-antineutrinos, 2 % de fotones, 2 % de gravitones y 1 % de bosones de Higgs. El balance materia-antimateria perfecto. Sin embargo, hoy estamos rodeados solamente de materia y la antimateria aparece sólo producida en los laboratorios. Vale entonces la pregunta de por qué quedó más materia o lo que es equivalente, ¿por qué existimos? Una respuesta factible (a lo físico) parece surgir de la existencia de violaciones de la simetría fundamental CP. La Naturaleza presenta una asimetría CP y por ello podemos decir que el mundo hecho de materia es diferente del mundo hecho de antimateria y entonces sobrevivió en lugar de aniquilarse.

La falta de antimateria está comprobada a partir de datos de masas galácticas, de la nucleosíntesis primordial (cantidad de deuterio y de helio) y de la radiación de microondas de fondo. Esta información permite concluir que hubo una asimetría bariónica primordial. Este resultado, unido al hecho de que nuestro Universo es eléctricamente neutro implica que existan más electrones que positrones. Sakharov (a fines de los 60’) mostró que es posible generar dinámicamente aquella asimetría bariónica de modo que surja de procesos primordiales. A fin de que se produzca la asimetría, la teoría subyacente debe violar la conservación del número bariónico B, así como la simetría C y la CP.

Pasemos a recorrer ahora el camino de llegada de la asimetría esencial a nuestra existencia. En los años cincuenta el estudio de la interacción débil (radioactividad) cuyo ejemplo paradigmático es el decaimiento del neutrón, mostró que la “virtud” correspondiente viola la simetría P. En efecto, esta violación es máxima ya que todos los neutrinos son izquierdos y todos los antineutrinos derechos. Pero además la interacción débil viola C. De modo que no sólo nos permite distinguir izquierda de derecha sino también materia de antimateria. A pesar de la presencia de estas asimetrías parecería conservarse el producto CP. Esto significa que en un planeta reflejado en el espejo valdrían las mismas leyes si estuviese hecho de antimateria. Así, en 1964 se produce la gran conmoción cuando Cronin y Fitch midieron experimentalmente ciertos decaimientos de partículas inestables que son asimétricos CP.

Para finalizar, volveremos al mundo macroscópico para insistir sobre la importancia vital de las asimetrías. En particular, haremos algunos comentarios sobre la violación derecha-izquierda. Este aspecto suele llamarse quiralidad y por asociación no podemos resistirnos a la “militancia científica” para mencionar, peyorativamente esta vez, la palabra quiromancia que etimológicamente desciende del griego (mano y adivinación) y significa precisamente “adivinación vana y supersticiosa por las rayas de la mano”...

Existe una gran cantidad de moléculas llamadas quirales. Ellas aparecen en formas asimilables a la imagen izquierda que de la derecha que brinda el espejo, o viceversa. En el caso de moléculas de materia no viva, el número de moléculas de una dada clase asimilables a la derecha es igual al de las izquierdas de la misma clase, en lo que se llama una mezcla racémica. Por el contrario, la vida “usa una sola mano”. Las moléculas de la materia viva son homoquirales. Esta es la única manera de garantizar los encuentros moleculares correctos. De hecho, se observa que las proteínas están fabricadas sólo con aminoácidos izquierdos, los que son codificados por ADN helicoidales derechos conteniendo sólo azúcares derechos.

Es interesante entonces recordar que el electromagnetismo tiene un tratamiento teórico coherente unificado con la interacción débil, aún cuando hay tres órdenes de magnitud de diferencia entre sus intensidades relativas. Lo que decimos es que cuando actúa el electromagnetismo, también actúa la fuerza débil. Justamente esta última interacción es asimétrica de paridad: viola P y sus consecuencias son detectables en los espectros atómicos. En nuestro análisis presente interesa percibir que ella produce una pequeña diferencia energética entre moléculas izquierdas y derechas. Esta semilla de asimetría puede ser luego amplificada por reacciones autocatalíticas. En una reacción autocatalítica la presencia de una “mano” estimularía entonces su producción inhibiendo la producción de su imagen especular. Se trata en algún sentido de un mecanismo dinámico similar al sugerido por Sakharov para el origen de la asimetría materia-antimateria. En muchas reacciones biológicas aparece esta característica y por ello la biología provee un amplificador de un eventual exceso de un tipo sobre otro. Este podría muy bien ser el mecanismo que da lugar a la homoquiralidad.

Habríamos encontrado entonces una huella de la física fundamental directamente a nivel molecular. Nada mejor para terminar que recordar la frase de Louis Pasteur (circa 1880): *“La vida tal como se nos manifiesta es una función de la asimetría del Universo y sus consecuencias ... puedo imaginar que todas las especies vivientes son primordialmente, en su estructura y en su forma externa, función de la asimetría cósmica”*.



## Capítulo 2

# Leyes de la Mecánica y del Movimiento

“WHAT WE KNOW IS A DROP,  
WHAT WE DO NOT KNOW IS AN OCEAN”.  
**Isaac Newton**  
(1643 - 1727)

## 2.1. Leyes de Newton

**1º Ley de Newton:** *Para sistemas inerciales. Todo cuerpo libre tiende a mantener su estado de movimiento uniforme o de reposo. En este caso nos referimos a sistemas de referencia inercial.*

**2º Ley de Newton:** *La sumatoria de las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo es igual a la masa por la aceleración que experimenta este cuerpo.*

**3º Ley de Newton:** *Toda acción tiene una reacción. Si se ejerce una fuerza sobre un cuerpo, este cuerpo ejerce a su vez una fuerza igual en módulo y dirección pero en sentido contrario sobre el primero.*

La Ley de la gravitación de Newton entre dos cuerpos de masas  $M$  y  $m_g$  es:

$$\vec{F} = G \frac{Mm_g}{r^2} \check{r}$$

De la 2da Ley de Newton y a partir de la Ley de atracción gravitacional, tenemos :

$$m_i \vec{a} = G \frac{Mm_g}{r^2} \check{r} \quad (2.1)$$

Sin embargo la masa aparece con roles muy distintos, por un lado la masa inercial nos dice cual es la aceleración que va a tener un cuerpo sobre el cual se está ejerciendo una cierta fuerza y por otro lado, la masa gravitatoria que nos dice cuanto va a valer sobre un cuerpo la fuerza ejercida gravitacionalmente por otro cuerpo, son conceptos completamente distintas y no tienen porque ser iguales, el hecho de que sean iguales es algo realmente notable que sorprendió a Newton.

## 2.2. Leyes de Kepler

**1º Ley de Kepler:** *Todos los planetas se desplazan alrededor del sol describiendo órbitas elípticas. El sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.*

**2º Ley de Kepler:** *El radio vector que une un planeta al sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.*

**3º Ley de Kepler:** *El cuadrado del periodo es directamente proporcional al cubo de la distancia media al sol.*

Tomemos la 2<sup>o</sup> Ley de Newton junto con la expresión (2.1) y definimos un vector  $\vec{r}$  como la distancia de un planeta al sol, optaremos por utilizar el sistema de cilíndrico de coordenadas para los cuales tendremos  $(\check{r}, \check{\theta}, \check{k})$ :

$$m\vec{a} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = G\frac{Mm}{r^2}\check{r}$$

$$\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \underbrace{\vec{r} \times \left(G\frac{Mm}{r^2}\check{r}\right)}_{\vec{r} \times \check{r} = 0} \quad (2.2)$$

Como el vector  $\vec{r}$  y el versor  $\check{r}$  apuntan en la misma dirección, a los efectos del producto vectorial dicha expresión se terminará anulando.

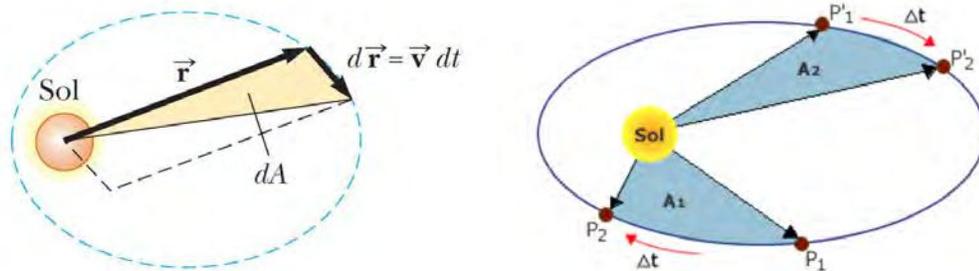
$$\frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = 0 \rightarrow \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{L} = \text{constante}$$

$$\frac{\vec{L}}{m} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{\vec{L}}{m} dt \quad (2.3)$$

Si observamos con detenimiento, notamos que el área barrida conforma un triángulo cuya área la podemos calcular como  $(rdr \sin(\theta)) / 2$ , por lo tanto, tomando el módulo de esta expresión :

$$\frac{L}{m} dt = r dr \sin(\theta) \rightarrow 2dA = \frac{L}{m} dt \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (2.4)$$

En las siguientes imágenes se pone de manifiesto lo dicho en las expresiones anteriores:



(a) Área barrida en un cierto dt      (b) Áreas barridas en tiempos iguales

Figura 2.1: 2<sup>o</sup> Ley de Kepler: El radio vector que une un planeta al sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.

Si trabajamos un poco más con las expresiones y asumimos órbitas circulares:

$$m\vec{a} = G\frac{Mm}{r^2}\check{r} = mr\omega^2\check{r} = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\check{r}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM}r^3} \quad (2.5)$$

Se demuestra en (2.5) que el cuadrado del periodo es directamente proporcional al cubo de la distancia al sol. Newton se dio cuenta que la masa inercial y gravitatoria debían ser iguales para garantizar la 3<sup>o</sup> Ley de Kepler.

## 2.3. El Principio de Mínima Acción

La naturaleza no realiza ningún trabajo inútilmente y escoge siempre el camino más breve. Maupertuis, en el año 1732, formuló este principio desde el punto de vista matemático y lo introdujo en la mecánica con el nombre de “*Ley de economía de la naturaleza*”.

En el ensayo de Cosmología Maupertuis escribió: *Es éste un principio tan sabio y tan digno del Ser supremo, en cualquier cambio que se produzca en la naturaleza, la suma de las acciones gastadas en este cambio será lo más pequeña posible.* Sin embargo, este principio en la mecánica no tiene el significado que Maupertuis le atribuía.

En la exposición formulada por Lagrange resulta claro que expresa la conservación no solo del mínimo sino también del máximo de acción y, por lo tanto, debe ser considerados de modo relativo y no absoluto. Desde este punto de vista, Hamilton generalizó este principio como “*principio de la acción estacionaria*” y, según esta visión, el principio dice solamente que en cierta clase de fenómenos naturales el proceso de cambio es tal que alguna magnitud física apropiada resulta un extremo (o sea un mínimo o un máximo y que, con mayor frecuencia, resultaría ser un mínimo).

### 2.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Fijado un sistema de coordenadas generalizadas  $q_i$  sobre el espacio de configuración, *espacio de todas las posibles posiciones instantáneas de un sistema mecánico*, se tiene que de todas las trayectorias posibles que transcurren entre el instante  $t_1$  y  $t_2$ , el sistema escogerá aquella que minimice la acción  $S$ .

$$S[q_i, \dot{q}_i] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (2.6)$$

Donde  $S$  le asigna un número a cada función  $q(t)$  definida en un intervalo  $[t_1, t_2]$

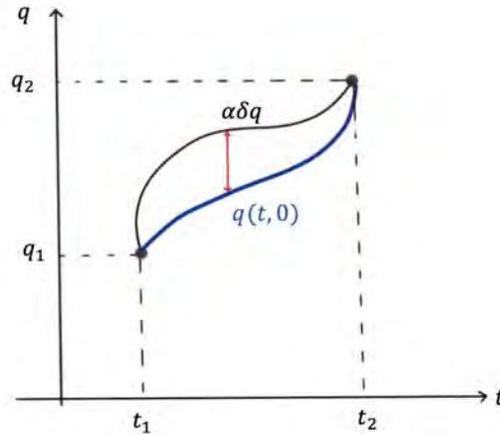
- $q_i(t) \implies$  Son las coordenadas paramétricas de una trayectoria posible.
- $\mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \implies$  Es la función lagrangiana del sistema.
- $\delta S \implies$  Variación del sistema frente a un cambio infinitesimal en la trayectoria

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1(t), q_2(t) \dots q_n(t); \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t) \dots \dot{q}_n(t), t) dt \quad (2.7)$$

Pudiendo escribir al conjunto de curvas considerando  $\alpha \ll 1$  como:

$$\begin{aligned} q_1(t, \alpha) &= q_1(t, 0) + \alpha \delta q_1(t) \\ q_2(t, \alpha) &= q_2(t, 0) + \alpha \delta q_2(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Lo podríamos representar de la siguiente manera:



Pues:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial q_i}{\partial t} dt &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} dt \end{aligned}$$

El primer término se terminará anulando dado que todas las curvas pasan por los puntos terminales fijos  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ , entonces:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) dt$$

Dado que  $\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = \delta q_i$  y a partir de (2.8) tenemos que:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), x) \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad x \rightarrow t$$

Finalmente, pidiendo que la variación  $\delta S$  sea nula frente a deformaciones  $\delta q_i$  arbitrarias, se obtiene la **Ecuación de Euler-Lagrange**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0} \quad (2.9)$$

Esta última expresión nos permite contar con un sistema analítico para obtener las ecuaciones que describen el comportamiento físico de las partículas. Es importante resaltar que, las coordenadas generalizadas del sistema no tienen que ser coordenadas cartesianas, sino que éstas también pueden ser ángulos, energías o cargas eléctricas.

Es interesante saber que contamos con maneras diferentes de escoger las coordenadas generalizadas, si bien cada sistema físico tiene asociado un número fijo de grados de libertad.

Como la función lagrangiana depende de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y el tiempo, las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas se tratan de modo independiente, por ejemplo, una derivada con respecto a  $q_i$  no afectaría en absoluto a  $\dot{q}_i$ .

# Capítulo 3

## Relatividad Especial

“EVERY DAY I REMIND MYSELF HUNDREDS OF TIMES  
THAT MY INNER AND OUTER LIFE REST ON THE WORK  
OF OTHER MEN, LIVING AND DEAD, AND THAT  
I MYSELF MUST STRIVE TO GIVE IN THE SAME MEASURE  
THAT I HAVE RECEIVED AND CONTINUE TO RECEIVE.”

**Albert Einstein**  
(1879 - 1955)

---

## 3.1. Los comienzos de la Relatividad

### 3.1.1. El Espacio y el Tiempo de Newton

Las nociones de espacio y de tiempo que predominaron hasta comienzos del siglo XX se debieron fundamentalmente al pensamiento de Isaac Newton (1642-1727). Él defendía la idea de un espacio absoluto, con existencia independiente de los fenómenos físicos y, de la misma manera, la idea de un tiempo absoluto que fluye uniformemente.

Newton consideraba que el espacio tiene una realidad independientemente de los objetos que residan en él; de manera que aun el espacio vacío sería concebible. En la física de Newton el espacio y el tiempo son el asiento de los fenómenos físicos, sin que estos produzcan efecto alguno sobre aquellos, pues el espacio permanece siempre igual a sí mismo, y el tiempo discurre uniformemente.

Los contemporáneos de Newton, como Gottfried Leibniz, no compartían esta posición. La noción newtoniana de espacio absoluto era inadmisibles para Leibniz, debido a que serían indistinguibles dos universos cuyos cuerpos ocupasen distintas posiciones “absolutas”, pero iguales posiciones relativas. Debido al éxito de la ciencia newtoniana, la polémica entre las posiciones de Newton y de Leibniz quedó acallada en estado latente, hasta su resurgimiento hacia fines del siglo XIX.

### 3.1.2. Concepción de relatividad según Galileo

Durante los siglos de tradición aristotélica que antecedieron a Galileo Galilei (1564-1642), el movimiento de un cuerpo se asociaba con la acción de una fuerza sobre el mismo. En palabras de Aristóteles: *El cuerpo en movimiento se detiene cuando la fuerza que lo empuja deja de actuar.*

Ahora bien, imaginemos que nos encontramos navegando a bordo de un barco, y desde lo alto del mástil dejamos caer una piedra. Los aristotélicos dirían que la piedra no caerá al pie del mástil debido que al soltarla dejamos de comunicarle la fuerza necesaria para que mantenga el mismo estado de movimiento que tiene el barco y, por lo tanto, caerá hacia popa. Galileo analizó la situación, estudió la persistencia del movimiento y desafió el pensamiento aristotélico al sostener que la piedra sí mantendría el estado de movimiento que tiene antes de ser soltada y, por lo tanto, acompañaría al barco y caería al pie del mástil. Galileo con esta afirmación, refutaría la idea de que el movimiento necesita de una fuerza. Por otro lado, nos enseña que no es posible detectar el movimiento a velocidad constante del barco mediante un experimento mecánico realizado en el interior del mismo. El concepto de Galileo de la *Persistencia del movimiento* es elevado por Newton a la categoría de "*Primera Ley de la Dinámica*":

Conocida como principio de Inercia: *“Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que fuerzas ejercidas sobre él, lo obligue a cambiar de estado. Este principio define los sistemas inerciales.”*

## 3.2. Principio de Relatividad de Galileo

Se suele denominar como el principio de relatividad de la mecánica o principio de Galileo. Este principio conecta la descripción cinemática de los sucesos respecto de un marco inercial  $K$  con la descripción cinemática de los sucesos respecto de otro marco inercial cualquiera  $K'$  de tal manera que la formulación matemática de las tres leyes de la mecánica clásica permanece invariantes al pasar de un marco al otro.

En el caso más sencillo, se emplean sistemas de coordenadas cartesianas en ambos marcos de referencia, y el movimiento de  $K'$  respecto de  $K$  es una traslación a lo largo del eje de las  $x$  con velocidad  $V$  en condiciones tales que los orígenes de los sistemas de coordenadas coinciden en el instante inicial, el mismo en ambos marcos. En ese caso un evento que en el instante  $t$  se produce en el punto de coordenadas  $x, y, z$  respecto de  $K$  y, respecto de  $K'$  se produce en un instante  $t'$  y presenta coordenadas  $x', y', z'$  dadas por las denominadas transformaciones de Galileo:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{3.1}$$

La trayectoria de una partícula respecto de  $K$  viene dada por la ley horaria  $x(t), y(t), z(t)$ . Entonces las velocidades, respecto de  $K$ , del movimiento de una partícula:

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt} \quad V_y = \frac{dy(t)}{dt} \quad V_z = \frac{dz(t)}{dt} \tag{3.2}$$

se vinculan con las velocidades del movimiento respecto de  $K'$  a través de las ecuaciones siguientes, que expresan la ley de adición de las velocidades clásica:

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{d'x(t')}{dt'} = \frac{dx(t)}{dt} - V \\ V'_y &= \frac{d'y(t')}{dt'} = \frac{dy(t)}{dt} = V_y \\ V'_z &= \frac{d'z(t')}{dt'} = \frac{dz(t)}{dt} = V_z \end{aligned} \tag{3.3}$$

Con mayor generalidad, si  $\vec{r}$  es el vector de posición de un evento respecto de  $K$ ,  $\vec{r}'$  es su vector de posición respecto de  $K'$  y si  $\vec{V}$  es la velocidad de  $K'$  respecto de  $K$ , entonces las transformaciones de Galileo adoptan la expresión vectorial:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{r}' &= \vec{r} - t\vec{V} \end{aligned} \quad (3.4)$$

De las transformaciones de Galileo se desprende que la diferencia entre los vectores de posición de dos partículas en un mismo instante es la misma respecto de todos los marcos de referencia:

$$\Delta\vec{r}' = \Delta\vec{r} \quad (3.5)$$

Como consecuencia la distancia entre ellas es la misma. Entonces, en la mecánica newtoniana la longitud de una varilla es independiente del marco de referencia respecto del cual se la mide: es absoluta

La trayectoria de una partícula respecto de  $K$  viene dada por la ley horaria  $r(t)$  mientras que respecto de  $K'$  viene dada por la ley horaria  $r'(t') = r'(t)$ . A partir de las transformaciones de Galileo se desprende que las velocidades de esa misma partícula se relacionan a través de la *Ley de adición de las velocidades* de la mecánica clásica:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \longrightarrow v(t) = v'(t) + \vec{V} \quad (3.6)$$

$$v'(t) = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \longrightarrow v'(t) = v(t) - \vec{V} \quad (3.7)$$

Como  $\vec{V}$  es constante, la aceleración de  $\vec{a}(t)$  respecto de  $K$  y de  $\vec{a}'(t)$  respecto de  $K'$  son iguales, podemos decir que: *La aceleración de una partícula es la misma respecto de cualquier marco de referencia inercial.*, es decir: *Es un invariante bajo las transformaciones de Galileo.*

En el caso particular en que tratamos la transformación de Galileo al discutir las ecuaciones (3.2) y (3.3), la invariancia de las componentes  $v_y$  y  $v_z$  junto con la suposición de la invariancia de la masa de las partículas, implica que las componentes  $p_y$  y  $p_z$  de la cantidad de movimiento son invariantes. Por lo tanto, si se conservan para un observador inercial, se debe conservar para el otro.

$$p'_x = \sum_i m_i v'_{xi} = \sum_i m_i (v_{xi} - V) = \sum_i m_i v_{xi} - \sum_i m_i V \quad (3.8)$$

$$p'_x = p_x - \sum_i m_i V \longrightarrow M = \sum_i m_i \quad (3.9)$$

Entonces, al considerar invariante a la suma de las masas de las partículas interactuantes, la conservación de la cantidad de movimiento de un sistema aislado de partículas cumple con el principio de relatividad clásico.

### 3.3. Relatividad Especial

#### 3.3.1. Postulados

- 1- Las leyes de la física son válidas para todos los sistemas inerciales.
- 2- El principio de relatividad de Galileo es válido para cualquier marco de referencia inercial.
- 3- La velocidad de la luz en el vacío es igual para todos los marcos de referencia inerciales y tiene el valor de 299.792,458 km/s, independientemente del estado de movimiento de la fuente.
- 4- El espacio es homogéneo, isotrópico y continuo.

#### SEGÚN EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

*Un segundo es la duración de 9.192.631.770 oscilaciones de la radiación emitida en la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del isótopo 133 del átomo de cesio (133Cs), a una temperatura de 0 K.*

#### 3.3.2. El experimento de Michelson-Morley

El experimento de Michelson-Morley consistía en un interferómetro que mediante un mecanismo creaba un patrón de interferencias debido al desfase de la luz causado por la velocidad de la Tierra.

Se lanzaba un rayo de luz de una longitud de onda conocida (con una lámpara de sodio) que incidía en un espejo semiplateado. Este espejo tiene la propiedad de que refleja la mitad del rayo y la otra mitad la reflecta. Ahora tenemos dos rayos de igual longitud de onda que salen formando un ángulo recto entre ellos y van a dar a dos

espejos donde se reflejan. Vuelven a incidir en el espejo semiplataado y vuelve a reflejarse una mitad de cada rayo y a reflejarse la otra.

Si existe alguna diferencia entre las longitudes de los brazos del interferómetro o si esta distancia es igual pero los rayos se mueven a velocidades diferentes aparecerá un patrón de interferencias. Como los rayos que salen del espejo semiplataado forman un ángulo recto entre ellos uno se moverá en la misma dirección que la Tierra y otra en una dirección perpendicular.

Esquema del experimento:

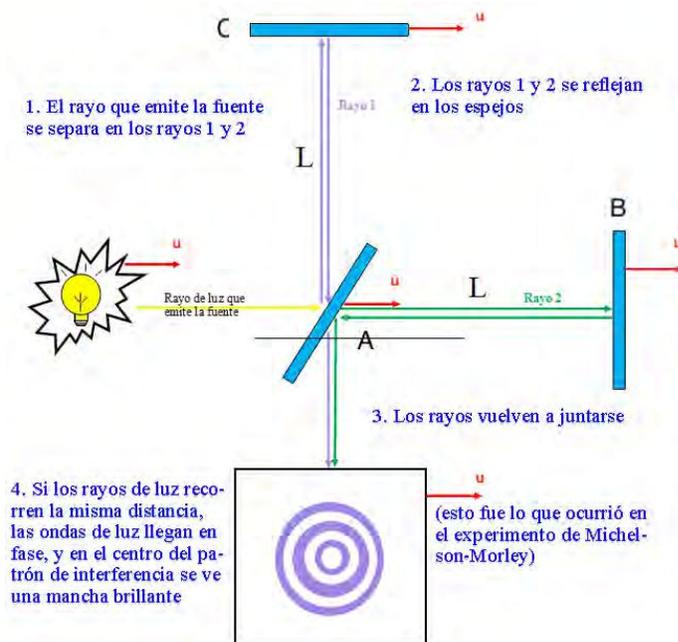


Figura 3.1: Interferómetro de Michelson y Morley

A partir del esquema del interferómetro podemos calcular el desfase entre un patrón de interferencias y otro. Calculemos primero el tiempo que le llevaría llegar de  $A$  a  $B$  y de  $B$  a  $A$ : Siendo  $c$  la velocidad de la luz y  $u$  la velocidad de la Tierra respecto al éter, entonces:

$$t_{ABA} = \frac{L}{c+u} + \frac{L}{c-u} = \frac{L(c-u) + L(c+u)}{c^2 - u^2} = \frac{2Lc}{c^2 - u^2} = \frac{\frac{2L}{c}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (3.10)$$

Y el tiempo que tarda en ir de  $A$  a  $C$  es:

$$d^2 = ct_{AC}^2 = L^2 + (ut_{AC})^2$$

$$t_{AC}^2 = \frac{L^2}{c^2 - u^2} \Rightarrow t_{AC} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{\frac{L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.11)$$

Siendo el tiempo que tarda en ir de  $C$  a  $A$  el mismo (llamamos  $t_{ACA}$  a la suma de estos dos últimos). Por tanto, si  $u \ll c$  podemos hacer una aproximación en serie de Taylor para los dos tiempos que tenemos y calcular la diferencia entre ellos:

$$t_{ABA} = \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) \quad (3.12)$$

$$t_{ACA} = \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) \quad (3.13)$$

$$\Delta t = t_{ABA} - t_{ACA} = \frac{2L}{c} \frac{u^2}{c^2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \dots \right) = \frac{2L}{2c} \frac{u^2}{c^2} = \frac{L}{c} \beta^2 \quad (3.14)$$

En donde definimos :

$$\beta \equiv \frac{u}{c} \quad (3.15)$$

Se puede ver que si giramos el interferómetro noventa grados entonces obtenemos  $\Delta t' = -\frac{L}{c} \beta^2 \neq \Delta t$ . Esta diferencia en el camino, dividida entre el periodo de la onda, nos da el porcentaje que se desvía el patrón de interferencias:

$$\delta = \frac{\Delta t - \Delta t'}{T} = \frac{2\frac{L}{c}\beta^2}{\frac{\lambda}{c}} = \frac{2L\beta^2}{\lambda} \quad (3.16)$$

En el interferómetro usado por Michelson y Morley los datos eran  $L = 11m$ ,  $\lambda = 5900,10^{-10}m$ ,  $u = 3,10^4 \frac{m}{s}$  y  $c = 3,10^8 \frac{m}{s}$ , con lo que nos da un valor  $\delta = 0,37$ , que es un 37%.

El valor medido experimentalmente fue cero, las transformaciones de Galileo no valen.

### 3.3.3. Transformaciones de Lorentz

El Principio de Relatividad Especial establece que las leyes de la naturaleza que describen las ecuaciones de la mecánica y la electrodinámica son invariantes bajo un grupo particular de transformaciones de coordenadas del espacio-tiempo. Este grupo particular corresponde a las Transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones de Lorentz, dentro de la teoría de la relatividad especial, son un conjunto de relaciones que dan cuenta de *cómo se relacionan las medidas de una magnitud física obtenidas por dos observadores en movimiento relativo*. Estas relaciones establecieron la base matemática de la teoría de la relatividad especial de Einstein.

### Hipótesis lineal

Imaginemos a los sistemas de referencia  $S$  y  $S'$  (moviéndose a una velocidad  $u$  con respecto a  $S$ ) cuyos orígenes de coordenadas coinciden en el instante inicial  $t = 0$ . Supongamos que el movimiento es a lo largo de la coordenada  $x_1$  según las transformaciones de Galileo (ver (3.1)). Esto es:

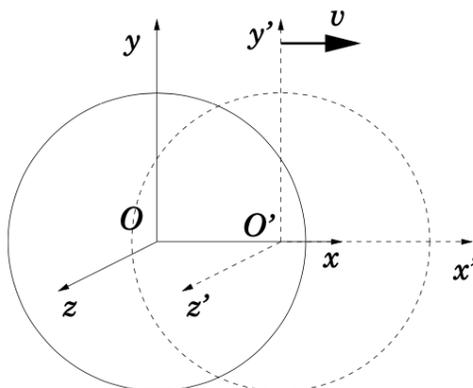


Figura 3.2: Dos sistemas de referencias  $O$  y  $O'$  se mueven con una velocidad relativa  $v$ . Los sistemas de referencia están orientados de manera tal que los ejes son paralelos y los relojes están sincronizados según  $t = t' = 0$

Intentaremos encontrar otras transformaciones de manera tal que se reduzcan a estas ya conocidas. Para ello hacemos la siguiente hipótesis lineal:

$$x'_1 = \gamma x_1 + \eta t \quad (3.17)$$

La posición del origen de coordenadas  $O'$  en cada uno de los dos sistemas viene dado por  $x'_1 = 0$  y  $x_1 = ut$  ya que en el instante inicial ambos orígenes coincidían. Por tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma ut + \eta t \rightarrow \eta = -\gamma u \\ x'_1 &= \gamma x_1 - \gamma ut = \gamma(x_1 - ut) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por tanto vemos que es necesario hallar el valor del factor adimensional  $\gamma$ .

### Valor de gamma

Si en el origen de coordenadas de los sistemas  $S$  y  $S'$  los tiempos coinciden y se emite un rayo de luz en una dirección, según el segundo postulado de la relatividad, el frente de ondas de este rayo estará definido en ambos sistemas por:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 t^2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 x'_i{}^2 - c^2 t'^2 &= 0\end{aligned}\quad (3.19)$$

Podemos suponer que  $x_2 = x'_2$  y  $x_3 = x'_3$ , (ver (3.1)), por lo tanto:

$$ct = x_1 = \gamma(x'_1 + ut') \quad ; \quad ct' = x'_1 = \gamma(x_1 - ut) \quad (3.20)$$

Operando debidamente tenemos:

$$\begin{aligned}ct' = \gamma t(c - u) \rightarrow \frac{t'}{t} &= \frac{\gamma}{c}(c - u) \quad ; \quad ct = \gamma t'(c + u) \rightarrow \frac{t'}{t} = \frac{c}{\gamma c + u} \\ \frac{\gamma}{c}(c - u) &= \frac{c}{\gamma c + u} \\ \gamma^2 &= c^2 \frac{1}{(c + u)(c - u)} = \frac{c^2}{c^2 - u^2} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Utilizando la relación mencionada en (3.15):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.21)$$

Vemos que  $\gamma$  es un factor de proporcionalidad que depende de la velocidad  $u$  con la que se mueve un sistema de referencia respecto al otro. Si este valor es  $u = 0$  (el valor en el que los dos sistemas coinciden, no hay movimiento relativo de uno con respecto al otro)  $\gamma = 1$ , como debe ser, ya que los dos sistemas son el mismo y por tanto las coordenadas también han de coincidir. Si el valor es  $u = c$  se puede comprobar fácilmente que  $\gamma = \infty$ . Para valores  $u > c$  obtenemos en el denominador una raíz de un número negativa, por lo que  $\gamma$  deja de estar definida.

Por tanto vemos que  $\gamma$  toma siempre un valor dentro del intervalo  $[1, \infty)$ , con  $u$  perteneciente al intervalo  $[-c, c]$  (como  $u$  va al cuadrado  $\gamma$  sólo depende de su módulo, no de su dirección).

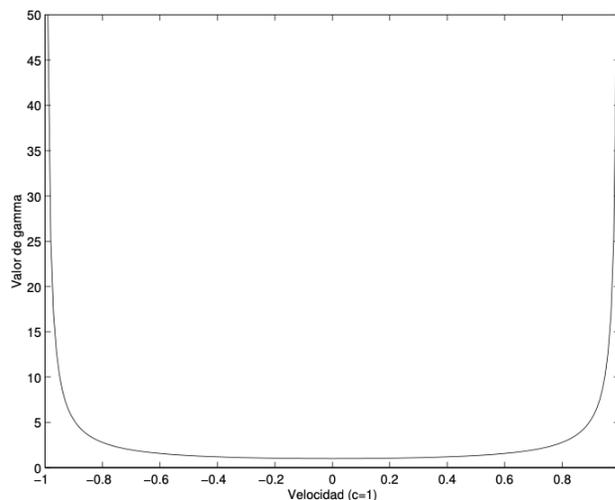


Figura 3.3: Gráfica de valores de gamma

El coeficiente  $\beta$  es la fracción de la velocidad de la luz. Si  $u = 0$  entonces  $\beta = 0$ , mientras que si  $u = \pm c$  entonces  $\beta = \pm 1$ .

### Transformaciones para el tiempo

Conocido ya el valor de  $\gamma$  tenemos que nuestra hipótesis lineal toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \gamma(x_1 - ut) \\x_1 &= \gamma(x'_1 + ut')\end{aligned}\tag{3.22}$$

Y a partir de ahí podemos despejar las transformaciones para el tiempo:

$$\begin{aligned}x_1 &= \gamma(x'_1 + ut) = \gamma(\gamma(x_1 - ut') + ut') = \gamma^2 x_1 - \gamma^2 ut + \gamma ut' \\ \gamma ut' &= (1 - \gamma^2)x_1 + \gamma^2 ut\end{aligned}$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{u}{c^2} x_1 \right)\tag{3.23}$$

Ya que  $(1 - \gamma^2) = -\frac{\gamma^2}{c^2} u^2$ . Se puede demostrar de modo análogo que:

$$t = \gamma \left( t' + \frac{u}{c^2} x'_1 \right)\tag{3.24}$$

### 3.3.4. Implicancias de las transformaciones de Lorentz

#### Simultaneidad y Causalidad

Una de las implicancias más importantes que acarrearán las transformaciones de Lorentz es la de que si dos sucesos son simultáneos en el sistema  $S'$  no lo son en el sistema  $S$ , es decir, si dos sucesos son simultáneos en  $S'$  entonces  $\Delta t' = 0$ , pero según la transformación temporal de Lorentz:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left( t'_2 + \frac{\beta}{c} x'_2 \right) - \gamma \left( t'_1 + \frac{\beta}{c} x'_1 \right) = \gamma \underbrace{t'_2 - t'_1}_{\Delta t'} + \gamma \frac{\beta}{c} \underbrace{(x'_2 - x'_1)}_{\Delta x'} \neq 0 \quad (3.25)$$

Se puede ver que  $c$  es la máxima velocidad que una señal puede tomar, ya que en este valor el factor  $\gamma$  se hace infinito y esto implicaría una diferencia temporal infinita; además se observa que la causa siempre ha anteceder al efecto en cualquier sistema.

Si dos sucesos son tales que en el sistema  $S'$  ( $x'_1 = x'_2$ ), en  $S$  tendríamos:

$$\Delta x = \gamma \underbrace{(x'_2 - x'_1)}_0 + \gamma \beta c \Delta t' \neq 0 \quad (3.26)$$

#### Dilatación temporal

Supongamos que tenemos una medida temporal  $T = t_2 - t_1$  en el sistema  $S$  en un mismo punto ( $x_1 = x_2$ ) y queremos calcular  $T' = t'_2 - t'_1$  en el sistema  $S'$ . Según las transformaciones de Lorentz tenemos que:

$$T' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left[ \left( t_2 - \frac{ux_2}{c^2} \right) - \left( t_1 - \frac{ux_1}{c^2} \right) \right] \quad (3.27)$$

Respetando la misma localización  $x_1 = x_2$ , tenemos:

$$T' = \gamma T \quad (3.28)$$

Se puede observar con este fenómeno que el tiempo medido en el sistema en reposo es siempre menor al tiempo medido en cualquier otro sistema de referencia inercial.

#### Contracción de Lorentz

Supongamos que tenemos el dato de la longitud  $L' = x'_2 - x'_1$  en el sistema  $S'$  y queremos calcular cuanto valdría  $L = x_2 - x_1$  en el sistema  $S$  utilizando las transformaciones de Lorentz.

$$L = x_2 - x_1 = \gamma [x'_2 + ut'_2 - x'_1 - ut'_1] \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta que las posiciones  $x'_2$  y  $x'_1$  se miden en el mismo instante de tiempo, de modo que  $t'_2 = t'_1$ :

$$L' = \frac{L}{\gamma} \quad (3.30)$$

Este fenómeno es conocido como la contracción de longitudes o contracción de Lorentz y pone de manifiesto que la longitud  $L$  medida en el sistema en reposo es siempre mayor que la longitud  $L'$  medida en un sistema de referencia inercial en movimiento.

### Adición de velocidades

Recordando que las expresiones para el cálculo de la velocidad se obtenían a partir de (3.2) y, teniendo en cuenta que el tiempo no es absoluto sino que relativo, hablar de velocidad en relatividad requiere saber si nos referimos al sistema en reposo o al que está sujeto al sistema de referencia inercial.

$$v = \frac{dx}{dt} \quad v' = \frac{dx'}{dt'} \quad (3.31)$$

Para calcular estas velocidades, por lo tanto, debemos conocer qué forma tienen los diferenciales de posición y de tiempo. Estas formas salen fácilmente a partir de las transformaciones de Lorentz (3.22).

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + u dt') dt = \gamma \left( dt' + \frac{u}{c^2} dx' \right) \\ dx' &= \gamma(dx - u dt) dt' = \gamma \left( dt - \frac{u}{c^2} dx \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Y por lo tanto obtenemos:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + u dt'}{dt' + \frac{u}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'} \quad (3.33)$$

Se deduce así la adición de velocidades en relatividad especial. Hay que hacer notar que en el caso de que  $c \rightarrow \infty$  (es decir,  $c$  es muy alto en comparación con las otras velocidades), esta relación de velocidades se reduce a utilizada en mecánica clásica, es decir  $v = v' + u$ .

Asimismo, si  $v' = u = c$ :

$$v = \frac{c + c}{1 + \frac{c}{c^2} c} = \frac{2c}{2} = c \quad (3.34)$$

y si  $v' = c$  y  $u \neq c$ :

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{uc}{c^2}} = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c}} = \frac{c(c + u)}{c + u} = c \quad (3.35)$$

Estas afirmaciones son consistentes con el hecho de que no se puede superar la velocidad de la luz en el vacío en ningún sistema de referencia.

### 3.4. Dinámica Relativista

La segunda ley de Newton, definimos la fuerza  $\vec{F}$  como el ritmo de cambio de la cantidad de movimiento  $\vec{p}$  respecto del tiempo, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \rightarrow m = m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{F} &= \frac{d(m_0\gamma\vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Donde  $m_0$  es la masa en reposo del cuerpo. Asumiendo que el trabajo realizado por una fuerza  $\vec{F}$  a lo largo de una curva  $C$  es igual a la variación de energía cinética, podemos decir lo siguiente:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \cdot dt$$

Desarrollando matemáticamente:

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\gamma} = \vec{v} \cdot \frac{d}{d\gamma}(m_0\gamma\vec{v}) = m_0\vec{v}^2 + m_0\gamma v \cdot \frac{dv}{d\gamma} = m_0v^2 + m_0\frac{c^2}{\gamma^2} = m_0c^2 \quad (3.37)$$

$$\Delta E = m_0c^2 \int \frac{d\gamma}{dt} \cdot dt = m_0c^2 \Delta\gamma \rightarrow \boxed{E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2} \quad (3.38)$$

En el caso de trabajar a bajas velocidades ( $v \ll c$ ) resulta muy útil para obtener una buena aproximación hacer un desarrollo en series de Taylor, esto es:

$$E \approx \underbrace{m_0c^2}_{\text{Energía de Reposo}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_0v^2 + \dots}_{E_k} \quad (3.39)$$

$E_k$ : Energía cinética

### 3.4.1. Cuadrivectores

El boost de Lorentz queda conformado por:

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\x^{1'} &= \gamma(-\beta x^0 + x^1) \\x^{2'} &= x^2 \\x^{3'} &= x^3\end{aligned}\tag{3.40}$$

Las transformaciones de Lorentz escritas en forma matricial están dadas por:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_\nu^\mu} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}\tag{3.41}$$

donde  $\beta = u/c$  y  $\gamma = \gamma(u) = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ , siendo  $u$  el módulo de la velocidad relativa entre los dos sistemas dirigida según el eje  $x$ . Resulta útil definir un “vector” de cuatro coordenadas o cuadrivector posición en la forma:

$$\tilde{r} = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z).\tag{3.42}$$

Este cuadrivector contiene las coordenadas de espacio-tiempo de un suceso siendo  $\Lambda$  la matriz que define a las transformaciones de Lorentz

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{r}' = \Lambda_\nu^\mu \tilde{r}\tag{3.43}$$

O bien, pudiendo simplificar su expresión utilizando la siguiente notación:

$$x'^\mu = \sum_\nu \Lambda_\nu^\mu x^\nu\tag{3.44}$$

Definimos el módulo de un cuadrivector como:

$$\mathbb{X}^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu\tag{3.45}$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  son los componentes de la métrica de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

por lo tanto:

$$\mathbb{X}^2 = -x^{0^2} + \sum_i x^{i^2} \quad (3.47)$$

El módulo de un cuadrivector es siempre un escalar (con lo cual es un invariante)

$$|\tilde{r}|^2 = |(ct)|^2 - |\vec{r}|^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = |\tilde{r}'|^2 \quad (3.48)$$

### Tiempo propio

Definimos el tiempo propio como:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) = -\frac{1}{c^2}dS^2 \quad (3.49)$$

El  $dS^2$  entre dos puntos aumenta aunque las coordenadas no cambian. (comoving)

Despejando el término de interés  $d\tau$ , nos queda:

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)} \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]} \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Por lo que  $\tau$  es el tiempo más pequeño, es decir, el tiempo medido en el sistema solidario con el suceso.

### Cuadrivector velocidad

Teniendo en cuenta la expresión obtenida en (3.50) para el  $d\tau$ , podemos definir la velocidad como la variación temporal de la posición, por lo tanto podemos definir el cuadrivector velocidad como:

$$\mathbb{U} = \left( \frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right) = \left( \gamma \frac{dx^0}{dt}, \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (3.51)$$

### Cuadrivector momento

Para obtener el cuadrivector momento **cuadrimomento** debemos multiplicar dicho vector por un escalar con dimensiones de masa, al que llamaremos  $m_0$ , por lo tanto, tenemos que:

$$\mathbb{P} = m_0 \mathbb{U} = m_0 \left( \gamma \frac{dx^0}{dt}, \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = (m_0 \gamma c, m_0 \gamma \vec{v}) \quad (3.52)$$

## 3.4.2. Generalización de la 2da Ley de Newton

### Cuadrivector Fuerza

En la dinámica clásica, la fuerza resultante aplicada sobre una partícula se define como el ritmo de cambio de la cantidad de movimiento respecto del tiempo, es decir:  $F = d\vec{p}/dt$ . En relatividad especial EL cuadrivector fuerza es la resultante de la derivada del cuadrivector cantidad de movimiento con respecto al tiempo propio de la partícula:

$$\mathbb{F} = \frac{d\mathbb{P}}{d\tau} = \gamma(v) \frac{d\mathbb{P}}{dt} = \gamma(v) \frac{d}{dt} (m_0 \gamma(v) c, \vec{p}) = \gamma(v) \left( m_0 \frac{d\gamma(v)}{dt} c, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) \quad (3.53)$$

La componente espacial de la cuadrifuerza, salvo el factor  $\gamma(v)$ , es la derivada de la cantidad de movimiento relativista que se identifica con la fuerza resultante sobre la partícula

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma(v) m_0 \vec{v}) \longrightarrow \vec{F} = m_0 \left( \frac{d\gamma(v)}{dt} \vec{v} + \gamma(v) \vec{a} \right) \quad (3.54)$$

Es interesante recordar que:

$$\frac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma^3 \beta \frac{d\beta}{dt} = \gamma^3 \frac{\beta}{c} \frac{d|v|}{dt} = \gamma^3 \frac{\beta}{c} \vec{a}_T \quad (3.55)$$

Haciendo referencia a  $\vec{a}_T$  como la componente tangencial de la aceleración que, sumado con la componente normal (o centrípeta)  $\vec{a}_N$ , resulta la aceleración de la partícula.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m_0 \left( \gamma^3 \frac{\beta}{c} \vec{a}_T \vec{v} + \gamma \vec{a} \right) \\ &= m_0 \gamma (\gamma^2 \beta^2 \vec{a}_T + \vec{a}) = m_0 \gamma (\gamma^2 \beta^2 \vec{a}_T + \vec{a}_T + \vec{a}_N) \\ &= m_0 \gamma \underbrace{[(\gamma^2 \beta^2 + 1)]}_{\gamma^2} \vec{a}_T + \vec{a}_N \longrightarrow \vec{F} = m_0 \gamma (\gamma^2 \vec{a}_T + \vec{a}_N) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Es interesante destacar que, en el caso relativista, la fuerza resultante y la aceleración *no necesariamente tienen la misma dirección*. Es fácil comprobar que para velocidades pequeñas en relación a la de la luz, la expresión anterior tiende a la conocida *Segunda Ley de Newton*.

Si consideramos un movimiento rectilíneo,  $\vec{a}_N = 0$ , por lo tanto,  $\vec{F} = \gamma^3 m_0 \vec{a}_T$ .

Podemos escribir la potencia que es transferida a la partícula como:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{v} &= m_0 \gamma(v) (\gamma^2(v) \vec{a}_T + \cancel{\vec{a}_N}) \vec{v} \\ &= m_0 \gamma^3(v) \vec{a}_T \vec{v} = m_0 \gamma^3(v) \frac{dv}{dt} \vec{v} \longrightarrow \beta = \frac{v}{c} \\ &= m_0 c^2 \gamma^3(v) \frac{d\beta}{dt} \beta \end{aligned}$$

Según la relación mencionada en (3.55), podemos decir que:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} (\gamma(v) m_0 c^2) \quad (3.58)$$

Finalmente, podríamos expresar el cuadrivector fuerza de la siguiente manera:

$$\mathbb{F} = \gamma(v) \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right) \quad (3.59)$$

### 3.4.3. Energía cinética Relativista

La energía cinética para una partícula en reposo es nula por definición. Si una partícula, sometida a una fuerza  $\vec{F}$ , se mueve desde el reposo en  $A$  hasta la posición  $B$ , la energía cinética será:

$$\begin{aligned}
E_k &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B F \cdot dl = \int_A^B \gamma^3 m_0 a_T dl = \int_A^B \gamma^3 m_0 \frac{dv}{dt} dl \\
&= \int_0^v \gamma^3 \beta d\beta = m_0 \int_0^v \gamma^3 v dv = m_0 c^2 \int_0^\beta \gamma^3 \beta d\beta
\end{aligned}$$

Haciendo referencia a (3.55), podemos escribir la anterior expresión de la siguiente manera:

$$E_k = m_0 c^2 \int_0^\beta \gamma^3 \beta d\beta = m_0 c^2 \int_1^\gamma d\gamma = [\gamma(v) - 1] m_0 c^2 \quad (3.60)$$

Es interesante notar que, para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, la expresión (3.60) tiende a la expresión clásica ya conocida.

### 3.4.4. Equivalencia entre Masa y Energía

Tomemos la expresión  $\gamma(v)m_0c$  y trabajémosla matemáticamente hasta llegar a la expresión de Einstein:

$$\frac{E}{c} = \gamma(v)m_0c = \frac{\gamma m_0 c^2}{c} = \frac{(\gamma - 1)m_0 c^2 + m_0 c^2}{c} = \frac{E_k + m_0 c^2}{c} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
E &= \underbrace{E_k}_{\text{Energía cinética}} + \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Energía en Reposo}} \\
&= (\gamma - 1)m_0 c^2 + m_0 c^2 = \underbrace{\gamma(v)m_0}_{m} c^2 \longrightarrow \boxed{E = mc^2} \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Para un sistema aislado de partículas debe conservarse el *cuadrivector cantidad de movimiento total*, que es la suma de los cuadrivectores correspondientes a cada partícula. Esto implica que se tiene que conservar la componente espacial que es la *cantidad de movimiento relativista del sistema* y también se tiene que conservar la *componente temporal que es la energía*, esto significa que:

$$\boxed{\sum_i (E_k + m_0 c^2)_i = Cte} \quad (3.63)$$

Einstein propuso que la masa de un cuerpo es una de las distintas formas en que se manifiesta su contenido energético. Es decir, en un sistema aislado no se conserva la energía por una parte y la masa por la otra, sino que se conserva la suma de la energía más el equivalente energético de la masa. Es decir, se conserva la **Energía Relativista**.

### 3.4.5. Cantidad de Movimiento e Invariante de Energía

La cantidad de movimiento vincula la energía y el momento relativista, es decir:

$$\mathbb{P} = (\gamma(v)m_0c, \gamma(v)m_0\vec{v}) = \left( \frac{E}{c}, \vec{P} \right) \quad (3.64)$$

La norma de este cuadrivector es invariante, es decir, tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales:

$$\begin{aligned} \left( \frac{E}{c} \right)^2 - |\vec{P}|^2 &= (\gamma m_0 c)^2 - (\gamma m_0 c |\vec{\beta}|)^2 \\ &= (\gamma m_0 c)^2 (1 - \beta^2) = (\gamma m_0 c)^2 \frac{1}{\gamma^2} \\ &\rightarrow \boxed{\left( \frac{E}{c} \right)^2 - |\vec{P}|^2 = (m_0 c)^2} \end{aligned} \quad (3.65)$$



## Capítulo 4

# Aspectos generales de la Astronomía y la Cosmología

“THE SIZE AND AGE OF THE UNIVERSE ARE  
BEYOND ORDINARY HUMAN UNDERSTANDING.  
LOST SOMEWHERE, BETWEEN VASTNESS AND  
ETERNITY, IS OUR TINY PLANETARY HOME”.

**Carl Sagan**  
**(1934-1996)**

## 4.1. Introducción

La **astronomía** es la ciencia que se ocupa del estudio del movimiento, origen y evolución de los cuerpos celestes del universo (*planetas, satélites, cometas, asteroides, estrellas, galaxias, nebulosas y cúmulos*). Esta ciencia es tan antigua como la civilización y probablemente sea el origen del pensamiento científico.

La astronomía aparece como primera ciencia 20 mil años atrás dado que los hombres eran cazadores recolectores y migraban persiguiendo animales de los cuales dependían y se alimentaban. Estos hombres notaban que estas migraciones tenían algún tipo de comportamiento periódico dado que las condiciones cambiaban a lo largo del año, por lo que los cazadores recolectores necesitaban saber cuándo se producían los movimientos de las grandes manadas de fauna que perseguían y por eso necesitaban entender como se desarrollaba el año, es decir, como era el periodo de la tierra alrededor del sol y los distintos movimientos en el cielo para predecir lo iba que a suceder en la tierra.

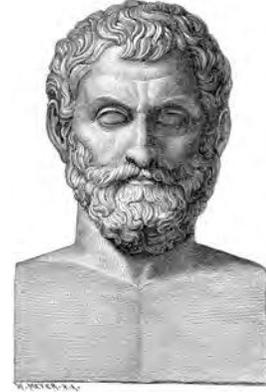
Aproximadamente unos 10 mil años después, en el valle de la Mesopotamia, cuando se asentaban las primeras ciudades y civilizaciones entre los ríos Tigris y Éufrates, la fuente principal de alimento paso a ser agropecuaria y como esto depende fuertemente de las estaciones del año, uno necesitaba saber que tan largo iba a ser el periodo sin frutos para poder guardar alimentos y poder sobrevivir hasta el próximo periodo en que vuelvan a surgir. Entonces, para los primeros hombres civilizados, la astronomía se transformó en una ciencia crucial porque las comunidades que no entendían o que no podían predecir cuando iba a hacer frío o cuando iba a hacer calor y cuando iba a haber alimentos y cuando no, desaparecían. Entonces, comprender este reloj cósmico se convirtió en una tarea esencial para la supervivencia.

La física, para comprender el movimiento, comportamiento y evolución de los cuerpos celestes, empieza a cumplir un papel fundamental. A modo de introducirnos en los aspectos generales de la astronomía, comenzaremos citando a los grandes propulsores de esta ciencia junto con sus aportes e invenciones.

## 4.2. Historia: Propulsores de la Astronomía

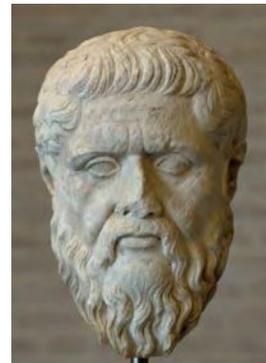
### 1. Tales de Mileto(Siglo VII a.C).

Concibió la redondez de la tierra. Teorizó que la Tierra era una esfera cubierta por una superficie que giraba alrededor de esta, así explicaría la noche, y que tenía algunos agujeros por los cuales se observaba, aún en la oscuridad nocturna, un poco de la luz exterior a la tierra; la que él llamo "fuego eterno".



### 2. Platón (del 427 a. C. al 347 a. C.).

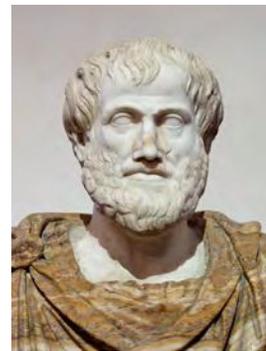
Dedujo que la Tierra era redonda basándose en la sombra de esta sobre la Luna durante un eclipse lunar. Concibió a la Tierra inmóvil y como centro del Universo..



### 3. Aristóteles (del 384 a. C. al 322 a. C.)

Sostenía que la Tierra era inmóvil y además era el centro del Universo.

Aristoteles: Los planetas son eternos. Su movimiento debe ser, por lo tanto, eterno. El único movimiento eterno es el circular. Por consiguiente, los planetas se mueven en círculos.



4. Aristarco de Samos (del 310 a. C. al 230 a. C.)

Sostenía que la Tierra giraba, que se movía y no era el centro del Universo, proponiendo así el primer modelo heliocéntrico. Además determinó la distancia Tierra-Luna y la distancia Tierra-Sol.



5. Eratóstenes (del 276 a. C. al 194 a. C.)

Contribuyó en el cálculo de la circunferencia terrestre comparando las altitudes del Sol del mediodía en dos lugares separados por una distancia Norte-Sur, del mismo modo calculó la inclinación del eje de la tierra. Ideó intercalar cada cuatro años un día adicional en los calendarios, produciendo el año bisiesto y creó el primer mapa del mundo, incorporando paralelos y meridianos basados en el conocimiento geográfico disponible de su época.



6. Hiparco de Nicea (del 190 a.C al 120 a. C.)

Observó y demostró que la Tierra era esférica y además sostenía que estaba fija. Sostenía que tanto los Planetas, la Luna y el Sol giraban sobre su propio eje.



### 7. Posidonio de Apamea (del 135 a. C. al 31 a. C.)

Fue el primero en adelantar la teoría según la cual del sol emanaba una fuerza vital que permeaba el mundo. Intentó medir la distancia del Sol con respecto a la Tierra y también su tamaño, además observó que las mareas se relacionaban con las fases de la Luna.



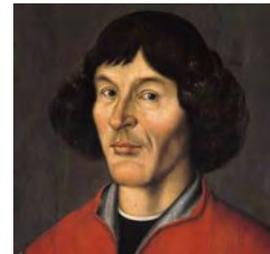
### 8. Claudio Ptolomeo (100 - 170)

Siguió la concepción del universo dada por Platón y Aristóteles. Ptolomeo fue un empirista, su trabajo consistió en estudiar la gran cantidad de datos existentes sobre el movimiento de los planetas con el fin de construir un modelo geométrico que explicase dichas posiciones en el pasado y fuese capaz de predecir sus posiciones futuras. Elaboró una enciclopedia astronómica llamada Almagesto la cual contiene el catálogo estelar más completo de la antigüedad, que fue utilizado ampliamente por los árabes y luego por los europeos hasta la alta Edad Media, y en el que se describen el sistema geocéntrico y el movimiento aparente de las estrellas y los planetas.



### 9. Nicolás Copérnico (1473 - 1543)

Considerado como el padre de la trigonometría, observó y calculó que la Tierra era esférica y estaba fija. Además afirmó que el Sol, la Luna y los planetas giraban alrededor de su propio punto. Por otra parte, concibió la división del día en 24 horas de igual duración; el descubrimiento de la precesión de los equinoccios; la distinción entre año sidéreo y año trópico.



---

10. Galileo Galilei (1564 - 1642)

Apoyó la teoría de Copérnico de que el sol era el centro de todas las órbitas planetarias. Con su telescopio observó: Montañas en la Luna. Nuevas estrellas. Satélites de Júpiter y que además tenía cuatro lunas que lo circundaban. Manchas solares. Las fases de Venus. Argumentó que las mareas se debían a la aceleración terrestre que se da cada 12hs. Introdujo el concepto de que las velocidades eran relativas con lo cual, éstas debían ser medidas mediante un marco o sistema de referencia.



11. Johannes Kepler(1571 - 1630)

Demostró que los planetas no siguen una órbita circular sino elíptica con el Sol ubicado en un foco de la elipse derivando en su primera ley. La segunda ley de Kepler en la cual afirma que los planetas se mueven más rápidamente cuando se acercan al Sol que cuando están en los extremos de las órbitas. En la tercera ley de Kepler establece que los cuadrados de los tiempos que tardan los planetas en recorrer su órbita son proporcionales al cubo de su distancia media al Sol.



12. Isaac Newton(1642 - 1727)

Estableció la ley de la Gravitación Universal: “Las fuerzas que mantienen a los planetas en sus órbitas deben ser recíprocas a los cuadrados de sus distancias a los centros respecto a los cuales gira”. Estableció el estudio de la gravedad de los cuerpos y probó que el Sol con su séquito de planetas viaja hacia la constelación del Cisne.



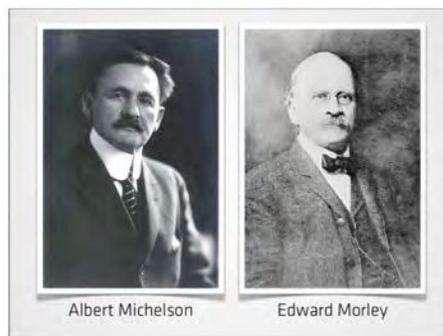
### 13. Ernst Mach(1838 - 1916)

Positivista, físico y filósofo. Manifestó ciertas diferencias acerca de la mecánica Newtoniana, en particular el concepto de espacio absoluto. Afirmó que la masa inercial no es una característica intrínseca de un móvil, sino una medida de su acoplamiento con el resto del universo. Congenió una representación del mundo como un conjunto de elementos y sensaciones dado que habría un acuerdo entre lo que llamamos instinto, sensación y concepto. Sostuvo la teoría de la coordinación de principio, es decir, de la conexión indisoluble entre sujeto y objeto. Ernst Mach fue uno de los primeros físicos en considerar que el resultado del experimento de Michelson y Morley era un éxito.



### 14. Michelson (1852 - 1931) y Morley(1838 - 1923) (ver: (3.10))

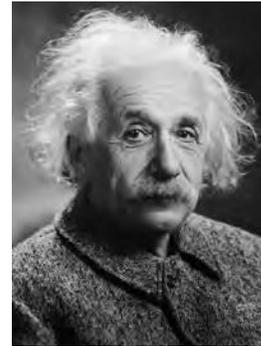
Construyeron lo que se conoce como el interferómetro de Michelson. Se compone de una lente semiplateada o semiespejo, que divide la luz monocromática en dos haces de luz que viajan en un determinado ángulo el uno respecto al otro. Con esto se lograba enviar simultáneamente dos rayos de luz (procedentes de la misma fuente) en direcciones perpendiculares, hacerles recorrer distancias iguales (o caminos ópticos iguales) y recogerlos en un punto común, en donde se crea un patrón de interferencia que depende de la velocidad de la luz en los dos brazos del interferómetro. Cualquier diferencia en esta velocidad (provocada por la diferente dirección de movimiento de la luz con respecto al movimiento del éter) sería detectada. En todas las ocasiones el interferómetro se comportó como si no hubiese “viento del éter” y, aunque se intentaron muchas explicaciones, como que la Tierra arrastraba de alguna forma al propio éter, ninguna resultó ser correcta. Michelson y Morley, en lugar de demostrar las propiedades del éter, demostraron su inexistencia.



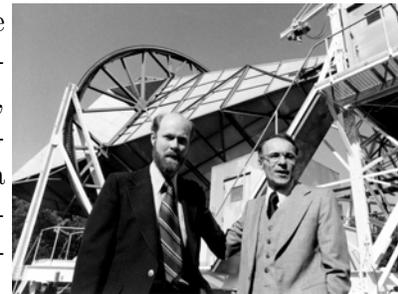
(a) Michelson y Morley

15. Albert Einstein(1879 - 1955)

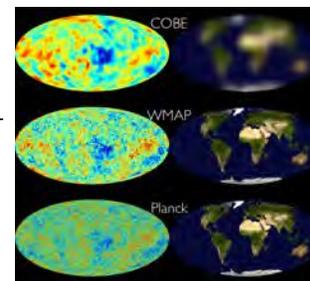
Desarrolló la Teoría de la Relatividad restringida y general y revolucionó la ciencia moderna.

16. Arno Allan Penzias (1933) y Robert Wilson (1936)

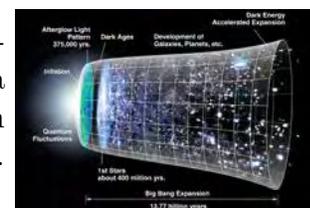
Descubrimiento en 1964 de la radiación cósmica de fondo de microondas. Mientras trabajaban en un nuevo tipo de antena en los Laboratorios Bell en Holmdel, Nueva Jersey, encontraron una fuente de ruido en la atmósfera que no podían explicar. Después de afinar la recepción de la antena, el ruido fue finalmente identificado como **CMB**, lo cual confirmaba supuestos planteados por la teoría del Big Bang.

17. COBE WMAP y Planck

Misiones espaciales para determinación de radiaciones cósmicas de microondas.



Representación artística de las observaciones del COBE y del WMAP. La superficie en azul claro es la zona donde los fotones (la luz) se desprenden de la interacción de los electrones e inician su viaje libre por el Universo.



### 4.3. Ideas generales de la Cosmología

La dinámica galáctica presenta cualidades importantes para estudiar de forma global la estructura de las galaxias permitiendo deducir, en algunas situaciones, las formas del campo gravitacional en el cual se mueven las estrellas a partir de sus posiciones y velocidades, esto nos va a dar la curva de rotación.

La validez del principio cosmológico afirma que no ocupamos ningún lugar especial en el universo, esto nos hace pensar que cualquier otro lugar es similar, es decir, el entorno de cualquier lugar del universo es similar al cual estamos nosotros ahora.

Si tomamos nuestra galaxia como referencia, podemos decir que está formada alrededor de un núcleo central que, en general, se puede asimilar a un agujero negro y una gran aglomeración de estrellas, luego tenemos otra gran aglomeración de estrellas distribuidas en los brazos, cada una de estas estrellas también cumplen con las leyes de Kepler al igual que los planetas.

Si quisiéramos saber que cantidad de estrellas hay en un recinto del espacio lo que podemos hacer es considerar la cantidad de brillo emitida por una pequeña parte de la galaxia y medir la intensidad total de luz en ese espacio y, de esta manera, el brillo total emitido va a ser igual a la intensidad promedio de luz de las estrellas por el número de estrellas, siendo que:

$M$  : masa total de las estrellas

$m_p$ : masa promedio de las estrellas

$i_p$ : intensidad promedio de las estrellas

$N(r)$ : número de estrellas

$I(r)$ : intensidad total de las estrellas

$$M = m_p N(r) \iff I(r) = i_p N(r)$$

por lo tanto

$$M = \frac{m_p}{i_p} I(r)$$

Y finalmente

$$\boxed{v^2 = G \frac{m_p}{i_p} \frac{I(r)}{r}} \quad (4.1)$$

## 4.4. Curva de Rotación

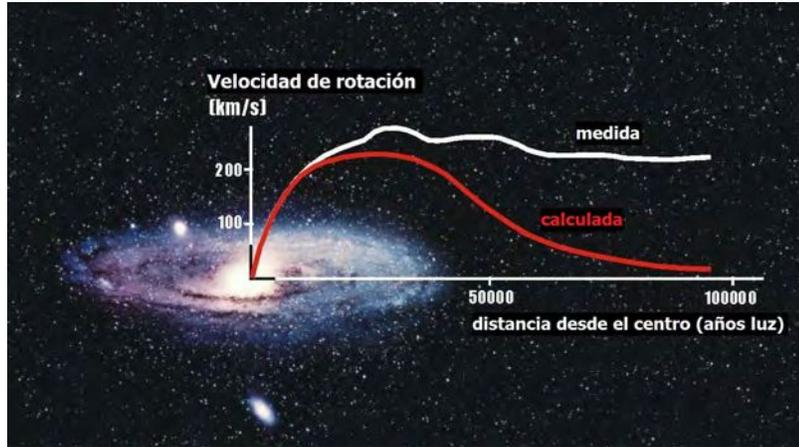


Figura 4.2: *Curva de Rotación.*

La **curva de rotación** de una galaxia (también llamada curva de velocidad), descrita por la ecuación anterior, es la velocidad de rotación de las estrellas observables como función de su distancia radial al centro de la galaxia. Una característica general de las curvas de rotación galácticas que han sido observadas es que la velocidad de rotación de las estrellas y el gas es constante (dentro de lo que puede medirse), independientemente de la distancia al centro de la galaxia. El problema de la rotación galáctica es la discrepancia observada en las curvas de rotación de las galaxias y la predicción de Newton-Kepler si suponemos que hay una masa central dominante con el material lumínico observado.

Cuando se calcula la masa de las galaxias únicamente a partir de la luminosidad y la proporción masa-luz en el disco, y si se supone que las porciones del núcleo de una galaxia espiral son aproximados a los de las estrellas, la masa que se deriva de la cinemática de la rotación observable y de la ley de la gravedad no concuerdan, esa apreciación se puede observar en la figura (4.2). Esta discrepancia puede deberse a una gran cantidad de **Materia Oscura** que envuelve la galaxia y se extiende hasta el halo de la galaxia. Sobre la materia oscura diremos algunas palabras en la sección (4.6).

Haciendo nuevamente mención al principio cosmológico, consideremos que tenemos una cantidad  $n$  de galaxias y que, entre cada una de ellas, existe una fuerza aportada según las leyes de Newton. Es decir:

$$m_i \vec{a} = - \sum_j G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \vec{r}_{ij} \quad (4.2)$$

Donde  $\vec{r}_i$  es un vector fijo que marca la posición de cada galaxias y si  $a(t)$  lo consideramos un factor de escala (función del tiempo):

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \longrightarrow \vec{r}_i = a(t)\vec{x}_i \longrightarrow \vec{v}_i = \frac{da(t)}{dt}\vec{x}_i = \frac{1}{a(t)}\frac{da(t)}{dt}\vec{r}_i = \mathcal{H}(t)\vec{r}_i \quad (4.3)$$

### La Ecuación de Hubble

Definimos  $\mathcal{H}(t)$  como la **Ley de Hubble-Humason**. Esto nos enseña que el universo se esta expandiendo y la velocidad a la que se están alejando las galaxias es proporcional a la distancia entre ellas, las que estén mas lejos se van a alejar mas rápidamente dado que se multiplican por un vector mas grande, eso es la *Ley de Hubble*, el universo se está expandiendo porque las galaxias se están alejando entre ellas sin moverse (comoving) y las mas lejanas se alejan mas rápidamente. De modo que lo que se expande es el espacio-tiempo.

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} \rightarrow \vec{r}_i = a(t)\vec{x}_i \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_i = \frac{da(t)}{dt}\vec{x}_i \\ \vec{a}_i &= \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d^2a(t)}{dt^2}\vec{x}_i \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sustituyendo (4.4) en (4.2) y operando debidamente obtenemos lo que:

$$\begin{aligned} m_i\vec{a} &= - \sum_j G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \vec{r}_{ij} \iff r_{ij} = a(t)x_{ij} \\ m_i \frac{d^2a(t)}{dt^2} \vec{x}_i &= - \sum_j G \frac{m_i m_j}{a^2(t)x_{ij}^2} \vec{x}_{ij} \\ a^2(t) \frac{d^2a(t)}{dt^2} \vec{x}_i &= - \sum_j G \frac{m_j}{x_{ij}^2} \vec{x}_{ij} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por lo tanto, se deduce que:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 a(t)}{dt^2} &= -\frac{GM}{a^2(t)} \\
\frac{da(t)}{dt} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} &= -\frac{da(t)}{dt} \frac{GM}{a^2(t)} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{da(t)}{dt} \right)^2 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{2GM}{a(t)} \right) \\
\left( \frac{da(t)}{dt} \right)^2 &= \frac{2GM}{a(t)} - \mathcal{K}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Siendo  $\mathcal{K}$  una constante de integración.

Definimos **La Ecuación de Hubble** de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathcal{H}^2 = \frac{2GM}{a^3(t)} - \frac{\mathcal{K}}{a^2(t)}} \tag{4.7}$$

La expresión (4.7) mide la velocidad de expansión (o contracción) en comparación con la escala del universo. En particular la evolución del parámetro de Hubble con el tiempo,  $H(t)$ , codificada en la variación del parámetro de Hubble como función de la distancia (observacionalmente medible como función del corrimiento hacia el rojo,  $H(z)$ ), es una fuente muy valiosa de información sobre la evolución de nuestro universo.

## 4.5. Fondo Cósmico de Microondas

### 4.5.1. Observacional

En noviembre de 1989, la **NASA** lanzó al espacio el satélite científico **COBE** (*Cosmic Background Explorer*), cuyos instrumentos se diseñaron para una única tarea: estudiar en detalle la llamada *radiación cósmica de fondo*. Esta es una forma de radiación electromagnética en la frecuencia de microondas que *llena el universo entero*, y que fue registrada por primera vez por **Arno Allan Penzias** y **Robert Woodrow Wilson** en 1964.

Por la forma en que se genera, la radiación de fondo contiene información de cómo era el Universo en el momento de la formación de los primeros átomos, cuando éste se volvió transparente a los fotones y pudieron propagarse por el universo. Así, el fondo de microondas puede pensarse como una imagen mantenida en el tiempo (*como una fotografía*) del pasado remoto del Universo tomada hace unos 370 mil años después del Big Bang.

### 4.5.2. Dependencia direccional y el universo temprano

La anisotropía o dependencia direccional de la radiación cósmica de fondo se divide en dos tipos: ANISOTROPÍA PRIMARIA, debido a los efectos que se producen en la última superficie de dispersión y antes de ésta; y la ANISOTROPÍA SECUNDARIA, debido a efectos tales como las interacciones de la radiación de fondo con gas caliente o potenciales gravitatorios, que se producen entre la última superficie de dispersión y el observador.

La estructura de las anisotropías cósmicas del fondo de microondas se determina principalmente por dos efectos: oscilaciones acústicas y difusión. Las oscilaciones acústicas surgen debido a un conflicto en el fotón-barión del plasma en el universo temprano. La presión de los fotones tiende a borrar las anisotropías, mientras que la atracción gravitatoria de los bariones, moviéndose a velocidades mucho más lentas que la luz, tienden a colapsarse para formar sobredensidades. Estos dos efectos compiten para crear las oscilaciones acústicas que se presentan el fondo de microondas característico. Los picos corresponden a las resonancias en la que los fotones se desacoplan cuando un modo particular está en su amplitud de pico.

Por lo tanto, podemos decir que el primer pico determina *la curvatura del Universo*, es decir, nos dice que tan plano es; el segundo pico está determinado por la *densidad bariónica del Universo*, y el tercero puede ser usado para extraer información acerca de la *densidad de materia oscura*.

En algún momento del pasado, el universo estuvo en un estado de plasma que reproducía condiciones similares a las que se encuentran hoy en día en el corazón de las estrellas. Debieron ocurrir esencialmente los mismos procesos físicos que son los responsables de la longevidad; el calor y la luminosidad de las estrellas. Una serie de procesos nucleares fusionaron principalmente hidrógeno, produciendo helio, y liberando neutrinos y energía en forma de radiación electromagnética. Esta es la fuente primaria de energía de nuestro Sol y ocurre a una temperatura mínima de unos tres millones de grados Kelvin.

Conforme el Universo se expande, la densidad espectral del fondo de radiación se va corriendo al rojo, dado que disminuye la temperatura, reduciendo la energía de los fotones, aumentando sus longitudes de onda y enfriando su espectro, de modo que *su temperatura debería ser inversamente proporcional a la longitud de escala del universo*. Esto permite determinar tanto la constante de **Hubble** como la edad del Universo.

### 4.5.3. Datos obtenidos del satélite WMAP

El satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), sucesor de COBE lanzado en 2001, aportó datos importantes del Universo. Su edad: 13.7 mil millones (+/- 200 millones de años) y su composición: contiene apenas 4% de la materia bariónica; 22% pertenece a algún tipo de materia desconocida que no emite luz, (**materia oscura**); su componente mayor, 74%, es una misteriosa densidad energética cuyo origen no se conoce, (**energía oscura**) y su efecto principal es acelerar la expansión del universo. La constante de Hubble, determinada de los datos de WMAP, es de  $70(\text{km/s})\text{Mpc}+2.4/-3.2$ , (siendo Mpc las siglas de Megaparsec, que equivalen a una distancia de 3,26 millones de años luz). Los datos son consistentes con un universo plano y proveen un firme soporte a la teoría inflacionaria. Los datos experimentales caen todos sobre la curva de densidad de Plank correspondiente a la temperatura de 2.74K.

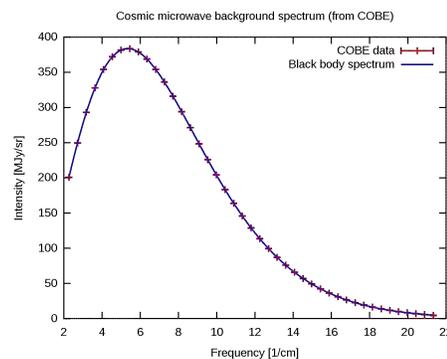


Figura 4.3: *Espectro cósmica de fondo de microondas medida por el instrumento FIRAS en el COBE.*

### 4.5.4. Proceso expansivo

La cosmología inflacionaria predice que después de unos  $10^{-37}$  segundos, el universo naciente experimentó un crecimiento exponencial que suavizó casi todas las irregularidades y, las restantes, fueron causadas por las fluctuaciones cuánticas en el inflatón (campo que ocasionaron el evento inflación) antes de la formación de estrellas y planetas (después de  $10^{-6}$  segundos).

A medida que el universo se iba expandiendo, el enfriamiento causó una disminución en la densidad de energía del plasma, lo que resultó favorable para los electrones a recombinarse con los protones formando átomos de hidrógeno. Este evento de recombinación ocurrió cuando la temperatura era de 3000 K o cuando el universo tenía aproximadamente 370.000 años. Como los fotones no interactúan con estos átomos eléctricamente neutros, comenzaron a viajar libremente a través del espacio, dando

como resultado el desacoplamiento de la materia y la radiación.

La temperatura del conjunto de fotones desacoplados ha seguido disminuyendo desde entonces; ahora a  $2,7260 \pm 0,0013K$ , y ésta continuará en disminución tanto como el universo se expanda. La intensidad de la radiación también se corresponde a la radiación de cuerpo negro a  $2.726 K$  dado que esta radiación desplazada al rojo es igual a la radiación del cuerpo negro a una temperatura inferior. De acuerdo con el modelo del Big Bang, la radiación del cielo que medimos hoy viene de una superficie esférica llamada la superficie de última dispersión. La mayor parte de la energía de radiación en el universo está en el fondo de microondas, que constituyen una fracción de aproximadamente  $6 \cdot 10^{-5}$  de la densidad total del universo.

Analicemos las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{4\pi G \rho a^2}{3} = \frac{K}{2} \quad ; \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) a \quad (4.8)$$

Por lo tanto, si se conoce  $p(\rho)$  se puede encontrar  $a$ ,  $\rho$  y  $p$ . El término  $K$  nos da información acerca de la curvatura del espacio-tiempo, siendo:

$$K = 1 \longrightarrow \text{cerrado}$$

$$K = -1 \longrightarrow \text{abierto}$$

$$K = 0 \longrightarrow \text{chato}$$

y las ecuaciones de Einstein:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p) \quad (4.9)$$

Existe evidencia de que, a gran escala, nuestro universo parece muy cercano a la planitud, y por tanto su curvatura global es cerca de cero  $k \approx 0$  (obviamente localmente esto no se cumple, especialmente cerca de estrellas supermasivas o agujeros negros). Dado que el parámetro de densidad  $\Omega$  se relaciona con la curvatura  $K$ , la constante de Hubble  $H$  y el factor de escala  $a$  mediante la relación:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{K}{a^2(t)H^2} \quad (4.10)$$

considerando un gas relativista, esto es:  $\Omega = 1$ , es decir:

$$K = 0 \longrightarrow p = \frac{\rho}{3} \longrightarrow a(t) = a_0 \sqrt{\frac{t}{t_0}} \implies \text{Expansión} \quad (4.11)$$

$$\longrightarrow p = -\rho \longrightarrow a(t) = a_0 \cdot e^{\sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3}} t} \implies \text{Inflación} \quad (4.12)$$

#### 4.5.5. Imágenes capturadas por el COBE y WMAP

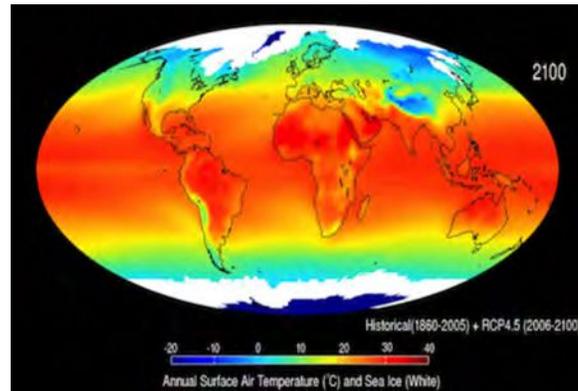


Figura 4.4: Fotografía del COBE: Muestra las diferencias en las temperaturas de la tierra. Estas oscilan entorno a los  $100^{\circ}\text{C}$ .

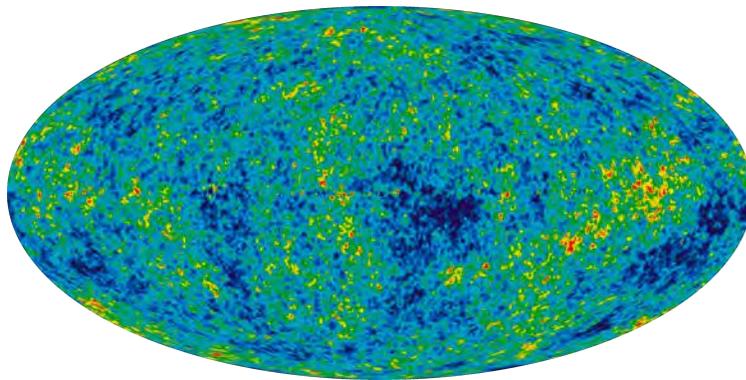


Figura 4.5: Fotografía del WMAP: Muestra las fluctuaciones de temperatura de la radiación de fondo del universo. Las diferencias son de  $1/100.000^{\circ}\text{C}$ .

## 4.6. Materia Oscura

Es importante destacar que el término *oscuro* no hace referencia a lo que en verdad es, teniendo en cuenta que todo aquello que tiende a ser *oscuro* (o *negro*) manifiesta una completa absorción de la luz mientras que la materia oscura no interacciona con la luz, por lo tanto, podemos darle a priori, cuatro conceptos necesarios para afrontar este tema en cuestión y, basándonos en estos conceptos, podremos tener una idea de la cantidad de materia oscura (*desconocida*) que inunda nuestra galaxia.

1. La materia oscura  $\rightarrow$  Es transparente.
2. Tiene masa  $\rightarrow$  Interacciona con la gravedad.
3. Es oscura  $\rightarrow$  No interacciona con la radiación .
4. Es Neutra  $\rightarrow$  No posee carga eléctrica.

Asumamos que podemos pesar la cantidad de materia luminosa (*Estrellas*) que hay en nuestra galaxia, lo que nos arroja un valor aproximado de  $1,3 \cdot 10^{10} M^{sol}$ , luego realizamos la misma práctica y pesamos la misma galaxia como un todo, lo que nos da un valor de  $9,7 \cdot 10^{10} M^{sol}$ . A simple vista uno podría darse cuenta que hay una gran diferencia en el resultado entre ambos experimentos, esto significa que la masa luminosa que se mide de nuestra galaxia es solo el 20 % del peso de toda la galaxia, dicho de otra manera, la materia oscura ocupa aproximadamente el 80 % de nuestra galaxia.

*CITA: La vida tal como se nos manifiesta es una función de la asimetría del universo y sus consecuencias. Puedo imaginar que todas las especies vivientes son primordialmente, en su estructura y en su forma externa, función de la asimetría cósmica. (LOUIS PASTEUR)*



# Capítulo 5

## Análisis Tensorial

“LA MATEMATICA È L’ALFABETO NEL QUALE  
DIO HA SCRITTO L’UNIVERSO.”.

**Galileo Galilei**  
(1564-1642)

## 5.1. Tensor útiles

### 5.1.1. Tensor Delta de Kronecker

La *delta de Kronecker* es un tensor de rango 2, simétrico, definido operativamente como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.1)$$

Para  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$  o bien mediante su representación matricial:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

### 5.1.2. Tensor de Levi-Civita

El tensor de *Levi-Civita* es un tensor de rango 3, antisimétrico, definido mediante:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } ijk \text{ forman una permutación cíclica de } 123 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ forman una permutación cíclica de } 213 \\ 0 & \text{si dos (o más) índices asumen el mismo valor} \end{cases} \quad (5.3)$$

Esto significa que:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{321} = \epsilon_{231} = 1 \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{312} = \epsilon_{213} = -1 \end{aligned}$$

### 5.1.3. Tensores isótropos: $\delta_{ij}$ y $\epsilon_{ijk}$

Son los únicos tensores isótropos en su rango correspondiente (*sus componentes no cambian bajo rotaciones de los ejes de coordenadas*). La *delta de Kronecker* es el único tensor isótropo de rango 2, mientras que el tensor de *Levi-Civita* es el único tensor isótropo de rango 3 y se vinculan según la expresión:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\epsilon_{km} - \delta_{jm}\epsilon_{kl} \quad (5.4)$$

## 5.2. Propiedades de vectores de 4-D

Introduciremos los 4-vectores (cuadrivectores), como cantidades de cuatro dimensiones cuyas componentes se transforman como las componentes  $dx^\mu$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$  bajo transformaciones de Lorentz  $\Lambda$ , tales que:

$$A^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} A^{\nu} \longleftrightarrow A^{\nu} = \Lambda_{\mu'}^{\nu} A^{\mu'} \quad (5.5)$$

si  $A^\mu$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$  denota las componentes de un 4-vector para  $A$ , las componentes del tensor métrico satisfacen:

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda_{\rho}^{\mu'} \Lambda_{\sigma}^{\nu'} \quad (5.6)$$

Para preservar la invariancia del producto escalar entre 4-vectores observados por distintos observadores inerciales. El producto escalar ha sido definido como:

$$A \cdot B = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu \quad (5.7)$$

Una de las funciones del tensor métrico es bajar índices. Por propiedad de dicho tensor podemos escribir los 4-vectores  $A$  y  $B$  de la forma:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad B_\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu \quad (5.8)$$

Los 4-vectores forman un espacio vectorial que satisface las propiedades de todo espacio vectorial. Particularmente, si  $A$  y  $B$  son vectores con componentes  $A^\mu$  y  $B^\mu$ , siendo  $\mu = 0, \dots, 3$ , entonces:

$$\begin{aligned} (A + B)^\mu &= A^\mu + B^\mu \\ (\alpha A)^\mu &= \alpha A^\mu, \quad \alpha \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por lo tanto, las componentes de la suma de vectores se transforman bajo una transformación de Lorentz como:

$$(A + B)^\mu \longrightarrow (A + B)^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} A^{\nu} + \Lambda_{\nu}^{\mu'} B^{\nu} \quad (5.10)$$

Por otro lado, como las transformaciones de Lorentz son transformaciones lineales que relacionan dos sistemas coordenados, los de coordenadas  $x^\mu$  y  $x^{\mu'}$ , mediante  $x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^\nu$  y  $x^\nu = \Lambda_{\mu'}^{\nu} x^{\mu'}$  respectivamente, en una relación continua y biyectiva, entonces las transformaciones de Lorentz son difeomorfismos que satisfacen:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = cte \quad \Lambda_{\mu'}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} = cte \quad (5.11)$$

Y dejarán invariante la métrica (5.6). Si  $\Lambda$  es un difeomorfismo arbitrario, tal como una transformación de coordenadas, tanto (5.11) como (5.10) también se satisfacen pero no dejarán invariante la métrica.

### 5.2.1. Base del espacio de vectores

En el contexto de la relatividad especial, que es formulada en un espacio-tiempo 4-dimensional plano, podemos elegir la base del espacio de vectores dada por:

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, 0)^T \\ e_1 &= (0, 1, 0, 0)^T \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0)^T \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1)^T \end{aligned} \quad (5.12)$$

El espacio-tiempo plano es conocido como *espacio-tiempo de Minkowski*. De otra manera, se puede escribir en función de la *delta de Kronecker* ' $\delta_{\nu}^{\mu}$ ' como  $e_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$  con  $\mu$  corriendo sobre las componentes de la *base* y  $\nu$  sobre los *elementos de la base*.

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{si } \mu = \nu \end{cases} \quad (5.13)$$

Por lo tanto, dada una base de vectores, un vector arbitrario  $A$  puede ser escrito como:

$$A = A^{\mu} e_{\mu} \quad (5.14)$$

Interpretamos el hecho de la ausencia de índices en  $A$  como una manifestación del carácter independiente de coordenadas.

$$A = A^{\mu} e_{\mu} = A^{\mu'} e_{\mu'} = A' \quad (5.15)$$

Lo que esto nos intenta mostrar es que, aunque las componentes del vector se transformen, el propio vector *no lo hace*.

### 5.2.2. Transformación de vectores base

Si tomamos la expresión (5.15) tenemos que:

$$A' = A^{\mu'} e_{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} A^{\nu} e_{\mu'} = A^{\nu} (\Lambda_{\nu}^{\mu'} e_{\mu'}) = A^{\nu} e_{\nu} = A \quad (5.16)$$

Encontramos la regla de transformación de los vectores base mediante:

$$e_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} e_{\mu'} \quad (5.17)$$

Consideremos que  $\Lambda$  es un *boost* a lo largo de la dirección  $x^1$ , dado por (3.41). En este caso, los únicos vectores base que se transforman son  $e_0$  y  $e_1$ , que, de acuerdo a (5.17), satisfacen:

$$\begin{aligned} e_0 &= \gamma e_{0'} - \gamma\beta e_{1'} \longrightarrow e_{0'} = \gamma e_0 + \gamma\beta e_1 \\ e_1 &= \gamma e_{1'} - \gamma\beta e_{0'} \longrightarrow e_{1'} = \gamma e_1 + \gamma\beta e_0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Esta ecuación indica que los vectores base se transforman inversamente a las componentes de vectores. Expresemos la transformación inversa a  $\Lambda$  como:

$$\Lambda^{-1} = (\Lambda_{\mu'}^{\nu}) \quad (5.19)$$

Por lo tanto, para obtener la nueva base  $\{e_{\mu'}\}$  en términos de la base no transformada  $\{e_{\nu}\}$ , utilizamos la transformación inversa (5.19) en (5.17) y obtenemos la transformación de vectores base:

$$e_{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} e_{\nu} \quad (5.20)$$

Habiendo partido de las identidades.

$$\Lambda_{\mu'}^{\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu'} e_{\nu} = \delta_{\rho}^{\nu} \quad \Lambda_{\nu}^{\mu'} \Lambda_{\rho'}^{\nu} e_{\nu} = \delta_{\rho'}^{\mu'} \quad (5.21)$$

## 5.3. Estructuras sobre la variedad

Tomemos nuevamente el objeto 4-dimensional  $A^{\mu}$  y realicemos un cambio de coordenadas arbitrario, esto es:

$$\{x^{\mu}\} \longleftrightarrow \{x'^{\mu}\} \quad (5.22)$$

Podemos decir que, adoptando el convenio de suma de Einstein, nos queda:

$$A'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^4 A^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = A^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (5.23)$$

Por lo tanto, vimos como el objeto de 4 componentes  $A^{\mu}$  se transforma ante un cambio de coordenadas a  $A'^{\mu}$ . Un objeto que se transforma de esta manera es un VECTOR CONTRAVARIANTE.

El elemento de línea que une dos puntos arbitrariamente próximos de la variedad también es un objeto contravariante:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad (5.24)$$

De otra forma, los VECTORES COVARIANTES serán del tipo:

$$B_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} x_{\nu} \quad (5.25)$$

El gradiente de un campo escalar es un ejemplo de un vector covariante y en general, a los vectores sobre la variedad se los llama tensores de rango 1.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \quad (5.26)$$

Podemos hacer una generalización y definir los tensores contravariantes (o covariantes) de rango arbitrario:

$$T \begin{array}{c} \overbrace{\dots \mu \dots}^{n \text{ veces contravariante}} \\ \underbrace{\dots \nu \dots}_{m \text{ veces covariante}} \end{array} = \dots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \dots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \dots T \dots \begin{array}{c} \dots \rho \dots \\ \dots \sigma \dots \end{array} \quad (5.27)$$

Esto nos lleva a pensar que podemos escribir los tensores de rango 2 de la siguiente manera:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} \implies (2 \text{ veces contravariante}) \quad (5.28)$$

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta} \implies (2 \text{ veces covariante}) \quad (5.29)$$

$$T'_{\nu}{}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\beta}^{\alpha} \implies (1 \text{ vez contravariante y } 1 \text{ vez covariante}) \quad (5.30)$$

Un ejemplo de tensor de rango 2 es el *tensor de energía-impulso* que caracteriza a cualquier sistema físico.



# Capítulo 6

## Introducción a la Relatividad General

“HENCEFORTH SPACE BY ITSELF AND TIME BY ITSELF,  
ARE DOOMED TO FADE AWAY INTO MERE SHADOWS,  
AND ONLY A KIND OF UNION OF THE TWO  
WILL PRESERVE AND INDEPENDENT REALITY”

**Hermann Minkowski**  
(1864-1909)

## 6.1. Principio de Equivalencia

El hecho de que la aceleración de objetos en caída libre sea independiente de su masa, es la manifestación de una coincidencia remarkable en la mecánica newtoniana: la igualdad entre la masa inercial  $m_i$  y la masa gravitatoria  $m_g$ .

En la mecánica newtoniana aparecen dos tipos de masas, en distintos contextos y de distintos tipos. La primera es la masa inercial  $m_i$ , que aparece en la segunda ley de Newton como constante de proporcionalidad entre la fuerza  $\vec{F} = m_i \vec{a}$  ejercida en un cuerpo y su aceleración, por lo tanto, la masa inercial es una medida para la resistencia de un cuerpo a cambios de velocidad. Por otra parte, la masa gravitacional  $m_g$  es una medida de cómo interacciona un cuerpo gravitacionalmente con los demás en el universo.

El hecho de que todos los cuerpos caigan con la misma velocidad implica que hay una relación entre estos dos tipos de masas que se debe cumplir, esto es:

$$\frac{m_g}{m_i} = \text{Constante} \quad (6.1)$$

***Principio de Equivalencia (para campos gravitatorios constantes):***

*Un sistema en caída libre en un campo gravitatorio constante es equivalente a un sistema inercial en ausencia de gravedad. Es imposible determinar la diferencia entre estas dos situaciones a base de experimentos físicos.*

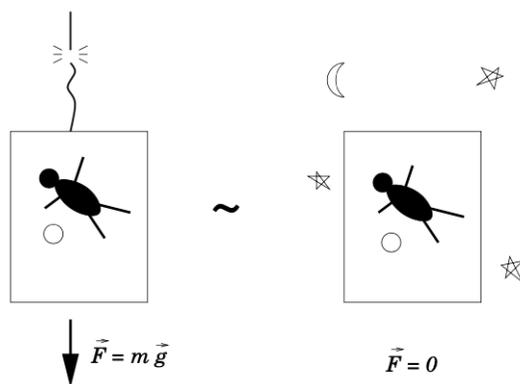


Figura 6.1: Un observador en caída libre es (localmente) equivalente a un observador en ausencia de campo gravitatorio. No hay un experimento físico que pueda distinguir (¡localmente!) entre estos dos casos.

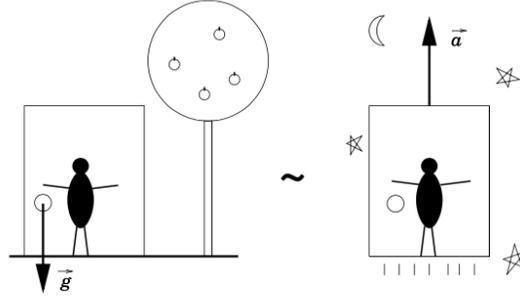


Figura 6.2: Un observador en un ascensor acelerado con aceleración constante es indistinguible de un observador en reposo inmerso en un campo gravitacional constante. No hay un experimento físico que pueda distinguir (¡localmente!) entre estos dos casos.

## 6.2. Espacio-Tiempo de Minkowski

La métrica de Minkowski ya la hemos utilizado en el capítulo de relatividad especial cuando hablamos de cuadvectores y la matriz que define a las transformación de Lorentz (3.46), aprovecharemos este apartado para darle una mayor formalidad al espacio de Minkowski.

Se trata de una variedad *de cuatro dimensiones y curvatura nula e isomorfa*, en la cual 3 dimensiones son espaciales y una temporal, de manera que todas juntas sirven para representar el espacio-tiempo.

Puede escribirse en un sistema de coordenadas cartesianas como:

$$\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \quad (6.2)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Se puede renombrar dichas coordenadas en término de las coordenadas espaciales y el tiempo en la mecánica newtoniana, es decir:  $(x^0, x^1, x^2, x^3) \longrightarrow (ct, x, y, z)$  con lo cual el tensor métrico se escribe mediante:

$$\eta = -c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \quad (6.4)$$

### 6.3. Curvatura del Espacio-Tiempo

Einstein propuso que la gravedad no debería ser considerada como una fuerza en el sentido convencional si no como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, siendo esta curvatura provocada por la presencia de materia. Esta es la idea principal de la **Teoría General de la Relatividad**.

Por lo tanto, si la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo y no la acción de algún cuadvivector  $\mathbf{f}$  definido sobre la variedad espacio-temporal, entonces la ecuación de movimiento de una partícula moviéndose tan sólo bajo la influencia de la gravedad debe ser la de una partícula libre en el espacio-tiempo curvo, esto significa que  $\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{0}$  donde  $p$  es el cuadrivector de la partícula y  $\tau$  es el tiempo propio medido a lo largo de su línea de movimiento. Por tanto, la línea de movimiento de una partícula en caída libre bajo la acción de la gravedad es una geodésica en el espacio-tiempo curvado.

Matemáticamente, el principio de equivalencia nos dice que en cualquier punto  $P$  del espacio-tiempo debemos poder definir un sistema de coordenadas  $X^\mu$  de forma que en la vecindad de  $P$ , el elemento de línea del espacio-tiempo tome la forma:

$$ds^2 \approx \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (6.5)$$

De la ecuación de la geodésica, se deduce que el camino que sigue una partícula libre (que sólo se mueve bajo la influencia de la gravedad) en la vecindad de  $P$  está dado por:

$$\frac{d^2 X^i}{d\tau^2} \approx 0 \longrightarrow [X^\mu] = (cT, X, Y, Z) \longrightarrow \frac{d^2 X^\mu}{dT^2} \approx 0 \quad (6.6)$$

En un entorno de  $P$  las coordenadas  $X^\mu$  definen un sistema cartesiano localmente inercial, en el cual las leyes de la relatividad especial se mantienen localmente. Para poder construir un sistema de coordenadas como este, el espacio-tiempo debe ser una variedad pseudo-Riemanniana. En esta variedad, en un sistema arbitrario de coordenadas  $x^\mu$ , el elemento de línea adopta la forma general:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

La geometría resultante es pseudoeuclídea dado que  $ds^2$  no es definido positivo. Por otro lado, dada la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  tenemos una inversa de forma tal que:

$$\eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (6.8)$$

### 6.3.1. Coordenadas localmente inerciales

La curvatura del espacio-tiempo nos impide encontrar unas coordenadas en las cuales la métrica  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  para todos los puntos de la variedad, de modo que no es posible definir un sistema cartesiano globalmente inercial, por lo tanto, utilizaremos un sistema arbitrario  $x^\mu$  que etiquete los puntos de la variedad y diremos que:

En cada punto  $P$  del espacio-tiempo, en un sistema localmente inercial  $X^\mu$  en el cual, en una limitada región alrededor de  $P$ , le corresponde a un sistema cartesiano que cae libremente sin rotación. Matemáticamente, esto corresponde a construir en un entorno de  $P$ , un sistema de coordenadas  $X^\mu$  tal que:

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \iff (\partial_\sigma g_{\mu\nu})_P = 0 \quad (6.9)$$

El sistema coordinado de vectores en  $P$  forman un conjunto ortonormal, esto es:

$$\mathbf{e}_\mu(P) \cdot \mathbf{e}_\nu(P) = \eta_{\mu\nu} \quad (6.10)$$

Existen un sin fin de sistemas de coordenadas localmente inerciales en  $P$ , todos ellos relacionados por transformaciones de Lorentz. Si un sistema  $X^\mu$  satisface las condiciones (6.9) y por tanto la condición (6.10), entonces también lo hará el sistema:

$$X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu \quad (6.11)$$

Donde  $\Lambda^\mu_\nu$  corresponde a las transformaciones de Lorentz. De este modo, un sistema cartesiano en caída libre en un punto  $P$ , está relacionado con algún otro por transformaciones de Lorentz. Para cualquiera de estos sistemas de coordenadas, el vector de la base de carácter temporal  $\mathbf{e}_0(P)$  es simplemente el cuadrivector velocidad normalizado  $\hat{u}(P)$  del origen del sistema en el punto  $P$ , y los vectores de carácter espacial ortonormales  $\mathbf{e}_i(P)$  definen la orientación de los ejes espaciales en el marco de referencia.

Para puntos cercanos a  $P$ , la métrica en el sistema de referencia localmente inercial  $X^\mu$  (cuyo origen está en  $P$ ), asumiendo (6.9):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})_P X^\sigma X^\rho \quad (6.12)$$

El tamaño de las derivadas segundas determinan la región sobre la cual la aproximación  $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$  sigue siendo válida.

### 6.3.2. Curvatura intrínseca de una variedad

Ya que la noción de curvatura es muy importante en la relatividad general, nos interesa tener una manera de cuantificar la curvatura intrínseca de una variedad en un punto  $P$  dado. Una variedad (o región de ésta) es plana si existe un sistema de coordenadas  $X^\mu$  tal que, para toda la región, el elemento de línea puede ser escrito de la forma:

$$ds^2 = \epsilon_1(dX^1)^2 + \epsilon_2(dX^2)^2 + \epsilon_3(dX^3)^2 + \dots + \epsilon_N(dX^N)^2 \quad \epsilon_a = \pm 1 \quad (6.13)$$

La existencia de  $g_{\mu\nu}$  nos permite separar los puntos en la variedad, respecto de  $P$ , en tres regiones bien definidas.

$$ds^2 < 0: \text{Región "TIPO ESPACIO"} \iff ds^2 < 0 \quad \text{si} \quad v > c$$

$$ds^2 = 0: \text{Región "TIPO LUZ"} \iff ds^2 = 0 \quad \text{si} \quad v = c$$

$$ds^2 > 0: \text{Región "TIPO TIEMPO"} \iff ds^2 > 0 \quad \text{si} \quad v < c$$

Lo que implica que  $P$  en la región "TIPO ESPACIO" no están causalmente ligados a  $P$ . Esta situación puede representarse gráficamente a través del llamado cono de luz.

El cono de luz futuro englobaría todos los "efectos" posibles de un evento dado sobre otros puntos de la variedad, mientras que el cono de luz pasado englobaría todas las "causas" posibles sobre dicho evento.

Dicho de otro modo, todo aquello que percibimos en cada instante se halla contenido en nuestro particular cono de luz pasado, mientras que todo aquello sobre lo que podríamos influir se encuentra contenido en nuestro cono de luz futuro.

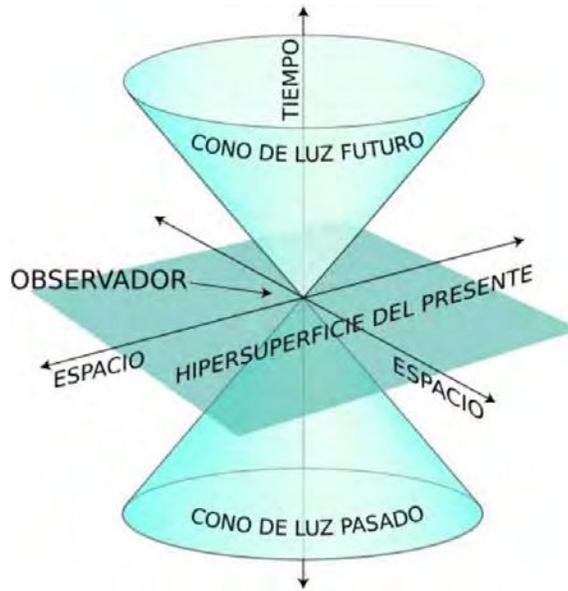


Figura 6.3: Las partículas materiales que tengan un estado inicial coincidente con el origen sólo pueden sufrir cambios o procesos que los lleven a estados que estén dentro del cono.

*Los sucesos que estén fuera del cono de luz no nos afectarán, y por lo tanto se dice de ellos que están situados en zonas del espacio-tiempo que no tienen relación causal con nosotros.*

*CITA: El tiempo no fluye con la misma rapidez en todas partes. Considerado desde la Tierra, se retarda cada vez más hasta llegar a territorios donde se detiene por completo. En estas remotas regiones del espacio, las cosas no suceden; están.*  
(ERNESTO SÁBATO)

## 6.4. Tensor de Energía-Impulso

La relatividad especial nos enseña que la masa de un objeto es sólo una de las posibles manifestaciones de la energía y que es posible convertir una cosa en la otra a través de la relación  $E = mc^2$ . Por ejemplo, la masa de un núcleo de helio es menor que la suma de las masas de sus componentes (2 protones y 2 neutrones), siendo la diferencia la energía que se libera en un proceso de fusión nuclear (y neutrinos). Para que el Principio de Equivalencia siga siendo válido y la masa gravitacional del núcleo de helio sea igual a la masa inercial, la gravedad se tiene que acoplar no sólo a las masas de los componentes, sino también a la energía (negativa) de ligadura.

La definición del tensor de energía-impulso (o energía-momento)  $T_{\mu\nu}$  es el flujo de

cuadrimomento  $p^\mu$  a través de una superficie  $x^\nu$  constante. En otras palabras, no es más que la generalización de un vector de corriente  $j^\mu$ , siendo el objeto que describe a este flujo un tensor simétrico  $T_{\mu\nu}$  de rango 2.

Recordemos que las ecuaciones de Maxwell en su formulación tensorial relacionan el campo electromagnético  $\mathbf{F}$  en cualquier punto con su fuente (el cuadrivector densidad de corriente  $\mathbf{j}$ ), de manera análoga podemos pensar que las ecuaciones que relacionan la curvatura con su fuente serán la energía y el momento de la materia.

Para construir las ecuaciones del campo gravitatorio, debemos encontrar primero una forma covariante de expresar el término fuente. El concepto covariante significa que todas las leyes físicas deben adoptar la misma forma en todos los sistemas de referencia, por lo tanto, debemos encontrar un tensor que describa la distribución de materia en cada punto del espacio-tiempo.

Consideremos además, un sistema de referencia  $S'$  moviéndose con una velocidad relativa  $v$  respecto de  $S$ . En este sistema de referencia, el volumen sufre una contracción de Lorentz en la dirección del movimiento. Por tanto, el número de partículas por unidad de volumen será ahora  $n' = \gamma n_0$ . Además, la masa de cada partícula en  $S'$  será  $m' = \gamma m_0$ . De esta manera, la densidad de materia en  $S'$  será  $\rho' = \gamma^2 \rho_0$ .

Concluimos que la densidad de materia no es un escalar, sin embargo transforma como la componente 00 de un tensor de rango 2. En cualquier punto del espacio, podremos construir un tensor  $T$  de rango 2 a partir del producto tensorial de los cuadrivectores velocidad, y que es coherente con nuestra exigencia de transformación de  $\rho_0$ .

$$\mathbf{T}(x) = \rho(x)\mathbf{u}(x) \otimes \mathbf{u}(x) \quad (6.14)$$

donde  $\rho(x) = \rho$  es la densidad propia del fluido que es medida por un observador comóvil con el flujo local y  $\mathbf{u}(x)$  es su cuadrivector velocidad. El tensor  $T(x)$  es el tensor energía-impulso de la distribución de materia. En un sistema arbitrario de coordenadas  $x^\mu$  en el cual el cuadrivector velocidad del elemento de fluido es  $u^\mu$ , las componentes contravariantes de (6.14) son:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (6.15)$$

Para dar un significado físico a las componentes del tensor energía-impulso, consideremos un sistema de coordenadas cartesianas localmente inercial en  $P$  en el cual las componentes del cuadrivector velocidad del elemento de fluido son  $[u^\mu] = \gamma(c, \vec{u})$ . En este sistema de referencia, escribimos las componentes del tensor como:

$$T^{00} = \rho u^0 u^0 = \gamma^2 \rho c^2 \quad T^{0i} = T^{i0} = \rho u^0 u^i = \gamma^2 \rho u^i \quad T^{ij} = \rho u^i u^j = \gamma^2 \rho u^i u^j$$

siendo cada uno de estos términos:

- $T^{00}$ : Densidad de energía de las partículas [ $c^{-2}$ ].
- $T^{0i}$ : Densidad de momento.
- $T^{i0}$ : Flujo de energía.
- $T^{ij}$ : Flujo de la componente  $i$  del momento por unidad de área en la dirección  $j$  y esfuerzo por unidad de área ejercida sobre una superficie cuya normal está en la dirección  $j$ .

El significado físico de las componentes del tensor energía-impulso  $T$ , nos da una idea de cómo generalizar su forma para incluir las propiedades de los fluidos reales como veremos a continuación.

### 6.4.1. Tensor de Energía-Impulso para un Fluido Real

Un fluido perfecto es aquel en donde las partículas no interactúan entre ellas y donde no hay conducción del calor o viscosidad en  $S$ . Por lo tanto, en  $S$ , para un fluido perfecto (es válido el principio de Pascal), las componentes del tensor  $T$  son:

$$[T]^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \longrightarrow T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \quad (6.16)$$

Podemos obtener una expresión válida en un sistema de coordenadas arbitrario simplemente reemplazando  $\eta^{\mu\nu}$  por las funciones de la métrica  $g^{\mu\nu}$ . De esta manera llegamos a una expresión completamente covariante para las componentes del tensor energía-impulso de un fluido perfecto en función de su cuadrivelocidad, densidad másica y presión:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (6.17)$$

Se observa que  $T$  es simétrico y está compuesto por dos campos escalares, presión  $p$  y densidad  $\rho$ , y un campo vectorial  $\mathbf{u}$  que caracterizan el fluido.

Dicho esto, la ley de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento puede expresarse de manera muy simple en términos del tensor de energía-impulso.

$$\boxed{\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0} \quad (6.18)$$

## 6.5. Símbolos de Christoffel

Supongamos que tenemos ‘ $n$ ’ campos vectoriales que en cada punto forman una base del espacio tangente  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  y un campo vectorial contravariante adicional  $\{\mathbf{v}\}$  de tal manera que este campo puede expresarse en términos de la base anterior, es decir:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n v^k(x) \mathbf{e}_k(x) \quad (6.19)$$

Donde  $v^k$  son las componentes del vector en dicha base. Si se usan coordenadas curvilíneas  $(x^1, \dots, x^n)$ , los vectores tangentes a las curvas coordenadas cambian de punto a punto. Eso implica que aun cuando el campo vectorial sea constante en general sus coordenadas en la base elegida no serán constantes, por lo tanto, es necesario considerar la variación de orientación de la base vectorial al pasar de un punto a otro, es decir, para evaluar la derivada (covariante) anterior necesitamos evaluar:

$$\bar{\partial}_i \mathbf{V} = \frac{\bar{\partial} \mathbf{v}}{\bar{\partial} x^i} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^n v^k \frac{\bar{\partial} \mathbf{e}_k}{\bar{\partial} x^i} \quad (6.20)$$

El segundo término muestra cómo cambia la base vectorial al recorrer una línea en coordenadas curvilíneas. Es decir, cuando se usan coordenadas cartesianas en  $(\mathbb{R}^n)$  las líneas coordenadas son líneas rectas paralelas a los ejes coordenados, y de alguna manera en cada punto la base vectorial escogida para medir las coordenadas de un campo vectorial en todos los puntos están "sincronizadas".

*Debemos tener en cuenta que, al trabajar en coordenadas curvilíneas y al pasar de un punto a otro, los vectores tangentes a las líneas coordenadas usados como base no coincidirán de un punto a otro y es necesario evaluar su variación al cambiar de punto. En general los vectores  $\mathbf{e}_k(x)$  no sólo dependen del punto, es necesario especificar cómo se ‘conectan’ los vectores en diferentes puntos y para ello se define una conexión que en el caso de  $\mathbb{R}^n$  puede representarse como un conjunto de coeficientes:*

$$\frac{\bar{\partial} \mathbf{e}_k}{\bar{\partial} x^i} := \sum_{m=1}^n \Gamma_{ki}^m \mathbf{e}_m \quad (6.21)$$

Los coeficientes  $\Gamma_{ki}^m$  se llaman SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL y definen localmente la conexión. Entonces, la derivada parcial covariante de un campo vectorial puede expresarse mediante:

$$\nabla_i \mathbf{v} = \bar{\partial}_i \mathbf{V} = \frac{\bar{\partial} \mathbf{v}}{\bar{\partial} x^i} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n v^k \Gamma_{ki}^m \mathbf{e}_m \quad (6.22)$$

Usando el convenio de sumación de Einstein y renombrando los índices la expresión anterior obtenemos:

$$\nabla_i \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + v^m \Gamma_{mi}^k \right) \mathbf{e}_k \quad (6.23)$$

Dada una curva  $t \mapsto (x^1(t), \dots, x^n(t))$  se define la derivada a lo largo de dicha curva:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \dot{x}^i \nabla_i \mathbf{v} = \left( \frac{dv^k}{dx^i} + v^m \Gamma_{mi}^k \right) \frac{dx^i}{dt} \mathbf{e}_k \quad (6.24)$$

### 6.5.1. Símbolos de Christoffel en un espacio euclídeo

Comenzaremos Identificando algunas cuestiones útiles sobre el tensor simétrico métrico covariante a  $g_{ij}$ :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} \quad (6.25)$$

Y su correspondiente contravariante tensor métrico  $g^{ij}$  utilizando superíndices siendo la inversa del tensor covariante  $g_{ji}$ .

Por lo tanto, definimos:  $g^{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}^i$ ; como la relación covariante y contravariante de vectores bases y  $g^{ij} F_j = F^i$ ; como la relación covariante y contravariante de las componentes del vector. Asimismo, podemos escribir sus correspondientes relaciones con subíndices:  $g_{ij} \mathbf{e}^j = \mathbf{e}_i$  y  $g_{ij} F^j = F_i$  respectivamente.

#### Símbolos de segunda clase

Descomponen el cambio de base con respecto a la base:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}^k = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot g^{km} \mathbf{e}_m \quad (6.26)$$

### Símbolos de primera clase

Descomponen el cambio de base con respecto a la base dual:

$$\Gamma_{kij} \equiv \Gamma_{ij}^m g_{mk} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}^m g_{mk} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_k \quad (6.27)$$

Reordenando dichas expresiones podemos decir que, para un espacio euclideo (no curvo):

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k = \Gamma_{kij} \mathbf{e}^k \quad (6.28)$$

Dado la simetría en los subíndices de los símbolos de Christoffel se deduce que:

$$\Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k = \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k \quad ; \quad \Gamma_{kij} = \Gamma_{kji} \quad (6.29)$$

Y si reescribimos los símbolos de Christoffel de segunda clase respecto de su base dual:

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{e}^k \implies \Gamma_{jk}^i = -\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_k \quad (6.30)$$

### 6.5.2. Símbolos de Christoffel derivados del tensor métrico

#### De primera clase

Éstos pueden ser derivados de los símbolos de Christoffel de segunda clase y la métrica, es decir:

$$\Gamma_{cab} = g_{cd} \Gamma_{ab}^d \quad (6.31)$$

O simplemente de la métrica:

$$\begin{aligned} \Gamma_{cab} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{cb}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ g_{ca,b} + g_{cb,a} - g_{ab,c} \} = [ab, c] = [ba, c] \end{aligned} \quad (6.32)$$

### De segunda clase

Éstos son los coeficientes de conexión, en una base de coordenadas, del tensor Levi-Civita con los símbolos de Christoffel:

$$\nabla_i \mathbf{e}_j = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \implies \Gamma_{ij}^k \equiv \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \quad (6.33)$$

cuyas relaciones son:

$$\nabla_i e_j = \nabla_j e_i \quad ; \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (6.34)$$

## 6.6. Tensor de curvatura de Riemann

El tensor de curvatura, o comunmente denominado  $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$  o  $R_{abc}^d$ , representa una medida de la separación de la métrica de la variedad respecto de la métrica euclídea. Podemos encontrar la solución al problema de la medición de la curvatura de una variedad en cualquier punto a partir de la *diferenciación covariante*. La derivada covariante es una generalización de la derivación parcial de vectores. Sin embargo, difieren en un aspecto importante: *cambiar el orden en el cual actúa la derivada covariante modifica el resultado*.

En efecto, podemos decir que el Riemann es una medida de la no conmutatividad del transporte paralelo o bien, una medida de la desviación de la geodésica.

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\nu}^\mu + [\Gamma_\rho, \Gamma_\sigma]^\mu \quad ; \quad [\partial_\mu] : \text{base coordenada} \quad (6.35)$$

$$F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho \implies A_\mu \leftrightarrow \Gamma_\mu \longrightarrow (\Gamma_\mu)_\beta^\alpha$$

$$\begin{aligned} R_{\nu\rho\sigma}^\mu &= \partial_\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\nu}^\mu + [\Gamma_\rho, \Gamma_\sigma]^\mu \\ &= \partial_\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\nu}^\mu + [(\Gamma_\rho \Gamma_\sigma)_\nu^\mu - (\Gamma_\sigma \Gamma_\rho)_\nu^\mu] \\ &= \partial_\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\nu}^\mu + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha - \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \end{aligned} \quad (6.36)$$

Recordando que:

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu \rightarrow R_{abc}^d \quad ; \quad \Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c \quad (6.37)$$

Reemplazando los índices obtenemos:

$$\boxed{R_{abc}^d \equiv \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d} \quad (6.38)$$

La expresión (6.38) corresponde a un tensor de rango 4 y es denominado como *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann*.

Otra forma también válida de expresarlo es mediante las derivadas de los símbolos de Christoffel:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p) \quad (6.39)$$

$$R_{iklm} = R_{lmik} \quad ; \quad R_{iklm} = -R_{kil m} = -R_{ikml}$$

## 6.7. Tensor de Ricci y Curvatura escalar

Partiendo del tensor de Riemann:

$$Ric_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = R_{\mu\nu} \quad (6.40)$$

De la primera identidad de Bianchi tenemos que:

$$\begin{aligned} R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} + R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} + R_{\nu\beta\mu}^{\alpha} &= 0 \\ (R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} + R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} + R_{\nu\beta\mu}^{\alpha}) \delta_{\alpha}^{\mu} &= 0 \\ Ric_{\beta\nu} + \underbrace{R_{\nu\beta\mu}^{\mu}}_{-R_{\nu\mu\beta\mu} = Ric_{\nu\beta}} &= Ric_{\beta\nu} + Ric_{\nu\beta} \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$Ric_{\mu\nu} = Ric_{\nu\mu} \quad (6.42)$$

Definimos pues, al tensor de curvatura como:

$$R = g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} \quad (6.43)$$

De la segunda identidad de Bianchi tenemos que:

$$\begin{aligned}
R_{\beta\mu\nu;\rho}^{\alpha} + R_{\beta\nu\rho;\mu}^{\alpha} + R_{\beta\rho\mu;\nu}^{\alpha} &= 0 \\
(R_{\beta\mu\nu;\rho}^{\alpha} + R_{\beta\nu\rho;\mu}^{\alpha} + R_{\beta\rho\mu;\nu}^{\alpha}) \delta_{\alpha}^{\mu} &= 0 \\
R_{\alpha\beta\mu\nu;\rho} + R_{\alpha\beta\nu\rho;\mu} + R_{\alpha\beta\rho\mu;\nu} &= 0 \\
(R_{\alpha\beta\mu\nu;\rho} + R_{\alpha\beta\nu\rho;\mu} + \underbrace{R_{\alpha\beta\rho\mu;\nu}}_{-R_{\alpha\beta\mu\rho;\nu}}) g^{\alpha\mu} &= 0 \\
R_{\beta\nu;\rho} + \nabla^{\alpha} R_{\alpha\beta\nu\rho} - R_{\beta\rho;\nu} &= 0 \\
\nabla_{\rho} R_{\beta\nu} + \nabla^{\alpha} R_{\alpha\beta\nu\rho} - \nabla_{\nu} R_{\beta\rho} &= 0 \\
g^{\beta\nu} (\nabla_{\rho} R_{\beta\nu} + \nabla^{\alpha} R_{\alpha\beta\nu\rho} - \nabla_{\nu} R_{\beta\rho}) &= 0 \\
\nabla_{\rho} R - \nabla^{\alpha} R_{\alpha\rho} - \nabla^{\alpha} R_{\alpha\rho} &= 0 \\
\nabla^{\alpha} (2R_{\alpha\rho} - g_{\alpha\rho} R) &= 0 \\
\nabla^{\mu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) &= 0
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Finalmente obtenemos:

$$\boxed{\nabla^{\mu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0} \tag{6.46}$$

Introducimos al tensor de Einstein como  $G_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &\equiv \nabla^{\mu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \\
g^{\rho\mu} \nabla_{\rho} G_{\mu\nu} &= 0 \longrightarrow \boxed{\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Es interesante destacar que  $G_{\mu\nu}$  es simétrico respecto de  $\mu\nu$  y a su vez  $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$ , esto nos lleva a recordar que  $T_{\mu\nu}$  posee las mismas propiedades, por lo tanto podemos hacer lo siguiente:

$$G_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu} \longrightarrow \alpha = 8\pi G \tag{6.48}$$

Vemos que se pone de manifiesto la simetría, la covarianza y la conservación.

## 6.8. Las ecuaciones de Einstein

Recordemos que a cada punto del espacio se le puede asignar un potencial gravitatorio  $\Phi$  relacionado con la densidad de la distribución de masa mediante su laplaciano y con el campo gravitatorio mediante su gradiente:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad \nabla\phi = -\vec{g} \quad (6.49)$$

y su divergencia la cual nos indica que sus fuentes u orígenes son escalares (*la masa*) y su rotor que nos indica que es conservativo:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \quad \nabla \times \mathbf{g} = 0 \quad (6.50)$$

Esta ley de gravitación newtoniana es incompatible con la relatividad especial dado que es instantánea. Asimismo, asumiendo un movimiento circular tenemos:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} = \frac{\Phi}{R} \longrightarrow \Phi = \frac{GM}{R} \quad (6.51)$$

Por lo tanto, puesto que  $v < c$ :

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\Phi}{c^2} \implies \frac{\Phi}{c^2} \ll 1 \quad (6.52)$$

Estudiaremos la ecuación de la geodésica en parametrización tiempo propio y, en este régimen de validez, la motivación estará en relacionar  $g_{\mu\nu} \longleftrightarrow \Phi$ .

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \sum_{\nu\rho} \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0 \quad (6.53)$$

$$\ddot{X}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{X}^\nu \dot{X}^\rho = 0 \quad (6.54)$$

$\dot{X}^\nu$  : Nos quedamos con la parte temporal

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \quad ; \quad \nabla_{\dot{X}} \dot{X} = 0 \quad ; \quad \dot{X} = \dot{X}^\mu \partial_\mu \quad (6.55)$$

Bajo condiciones NR (No relativistas), en un espacio plano y estático  $\partial_t\Phi = 0$

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = c \left( t, \frac{\vec{x}}{c} \right) \rightarrow \frac{dx^\mu}{dt} = c \left( \frac{dt}{d\tau}, \frac{1}{c} \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = c\gamma \left( 1, \frac{v}{c} \right)$$

$$\frac{dt}{d\tau} \gg \frac{1}{c} \frac{d\vec{x}}{d\tau} \quad (6.56)$$

Pues tenemos que:

$$\frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_0 g_{0\nu} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00} \quad (6.57)$$

Asumiendo que la gravedad no es más que una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, considerando el caso para un campo gravitatorio débil y en coordenadas tales que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  (con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ) el cual la métrica es estática.

El Christoffel en el límite NR, tenemos que:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00}$$

$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} \longrightarrow$  *Introducimos el  $\Phi$  débil.*

$\partial_\nu$  : *Nos quedamos con las componentes espaciales ( $\partial_t = 0$ )*

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu h_{00} \longrightarrow \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

Analizamos las distintas componentes (espaciales y temporales):

$$\mu = 0 \longrightarrow \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \implies \frac{dt}{d\tau} = \text{cte} = \frac{E}{mc^2} \quad (6.58)$$

$$\mu = i \longrightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (6.59)$$

Haciendo una comparación con Newton:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} = -\vec{\nabla} V_{grav} \implies V_{grav} = m_g \Phi_{grav} \quad (6.60)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{c^2}{2} \partial_i h_{00} \implies \vec{a} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (6.61)$$

$$\implies h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2} + \text{cte} \quad (6.62)$$

$$g_{00} = -1 + h_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.63)$$

Por lo tanto, obtenemos que en el límite NR:

$$g_{00} = - \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \quad (6.64)$$

Estas observaciones sugieren que para un campo gravitatorio débil  $\Phi$  y estático  $\partial_t \Phi = 0$  en régimen de baja velocidad se condiga con la expresión  $\nabla^2 g_{00}$ ; además recordemos que la forma más apropiada de describir los efectos de la materia esta dada por el tensor energía-impulso, así pues, para un fluido perfecto:

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \longrightarrow T_{00} = \rho c^2 \quad (6.65)$$

Como comentamos anteriormente en la expresión (6.47), vimos que dicho tensor tenía ciertas particularidades que estaban íntimamente relacionadas con el tensor energía-impulso (6.18), siendo que éste esta directamente relacionado con la ley de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

$$K_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \longrightarrow \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2,077 \cdot 10^{-43} N^{-1} \quad (6.66)$$

Propiedades del tensor  $K_{\mu\nu}$ :

1.  $K_{\mu\nu}$  es un tensor de rango 2 y está relacionado con la curvatura del espacio-tiempo pues, dicha curvatura deberá estar en función del tensor de curvatura Riemann  $R_{\mu\nu\sigma\rho}$  y del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .
2.  $K_{\mu\nu}$  debería contener términos que son lineales en derivadas segundas de los coeficientes de la métrica.
3. Cómo dijimos en (6.18), dado que  $T_{\mu\nu}$  es simétrico,  $K_{\mu\nu}$  también debería serlo.

El tensor de curvatura de Riemann  $R_{\mu\nu\sigma\rho}$  es lineal en las derivadas segundas de la métrica, escribiremos al tensor  $K_{\mu\nu}$  en función del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y de la curvatura escalar  $R$ . Según lo antedicho, la forma más general que se adapta a las condiciones anteriores es la siguiente:

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} \quad (6.67)$$

Para encontrar las constantes  $a$  y  $b$ , nos remitiremos a la expresión (6.18) y según lo dicho en (3) es necesario que:

$$\nabla_{\mu} K^{\mu\nu} = \nabla_{\mu} (aR^{\mu\nu} + bRg^{\mu\nu}) = 0 \quad (6.68)$$

Haciendo una analogía con el tensor de Einstein (6.46), decimos que:

$$\nabla_b \left( R^{bc} - \frac{1}{2} g^{bc} R \right) = 0 \quad (6.69)$$

y además  $\nabla_{\mu} g^{\mu\nu} = 0$ , obtenemos:

$$\nabla_{\mu} K^{\mu\nu} = \left( \frac{1}{2} a + b \right) g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} R = 0 \quad (6.70)$$

Puesto que la cantidad  $\nabla_{\mu} R$ , en general será no nula en una región del espacio-tiempo, concluimos con que  $b = -a/2$ . Las ecuaciones del campo gravitatorio quedan de la forma:

$$a \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (6.71)$$

Finalmente, para fijar la constante  $a$ , podemos comparar con el límite del campo gravitatorio débil con la ecuación de Poisson en la gravedad newtoniana. Para que se de una buena consistencia con la teoría de Newton, debemos exigir que  $a = 1$  y por lo tanto:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad (6.72)$$

Ecuación del campo de Einstein

Así pues, quedan expresadas las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio.

Información sobre  $G_{\mu\nu}$  :

- La curvatura del espacio se acelera con  $T_{\mu\nu}$  por la ecuación de Einstein  $G_{\mu\nu}$ .
- $R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\sigma\mu\nu} \Rightarrow$  Tensor de Ricci. (En un espacio plano  $R_{\mu\nu} \equiv 0$ ).
- $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \Rightarrow$  Escalar de Ricci.
- $R_{\lambda\sigma\mu\nu} \Rightarrow$  Tensor de curvatura de Riemann. (En un espacio plano  $R_{\lambda\sigma\mu\nu} \equiv 0$ )
- $g_{\mu\nu} \Rightarrow$  Tensor métrico.
- $G \Rightarrow$  Constante de Newton

### 6.8.1. El límite para el campo $\Phi$ débil

Al igual que como se había sugerido en la sección anterior, para el caso de un campo gravitatorio débil y estático en régimen de baja velocidad, trabajaremos con las componentes '00' tanto para la métrica, el tensor de Ricci, el Riemann y el tensor métrico.

Partiremos de la expresión (6.71):

$$\left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = \kappa T_{\mu\nu} \longrightarrow R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) \quad (6.73)$$

Bajo las consideraciones ya impuestas:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  (con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ) el cual la métrica es estática y suponiendo que el espacio está levemente curvado:  $g_{00} \approx 1$ . Trabajaremos con  $R_{00}$  tomándolo del Christoffel en el límite NR:

$$R_{00} = \partial_i \Gamma_{00}^i \quad (6.74)$$

Hasta el primer orden de  $h_{\mu\nu}$  es válida la aproximación:

$$\Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00} \implies R_{00} \approx -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} \quad (6.75)$$

Por lo tanto:

$$-\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} \approx \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) \quad (6.76)$$

Lo que nos permite arribar a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} \approx -\frac{1}{2}\kappa\rho c^2 \quad (6.77)$$

Consideraciones para llegar al paso anterior:

1. La distribución de materia es tal que:  $p/c^2 \ll \rho$ .
2. La velocidad de las partículas tienen velocidades pequeñas comparadas con  $c$ .
3. Debido a (2), podemos aproximar  $\gamma \approx 1$  y  $u_0 \approx c$ .

Finalmente podemos escribir  $\delta^{ij}\partial_i\partial_j \equiv \nabla^2$  y según (6.63) y (6.66):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} &\approx -\frac{1}{2}\kappa\rho c^2 \\ \nabla^2 \left( -\frac{2\Phi}{c^2} \right) &\approx \kappa\rho c^2 \\ \nabla^2\Phi &\approx -\frac{1}{2}\kappa\rho c^4 \implies \kappa = -\frac{8\pi G}{c^4} \\ \boxed{\nabla^2\Phi \approx 4\pi G\rho} & \end{aligned} \quad (6.78)$$

La expresión (6.78) pone de manifiesto que, bajo las consideraciones adoptadas en el régimen (NR), se llega claramente a ecuación de Poisson de la gravedad newtoniana.

### 6.8.2. Constante cosmológica

Recordando las relaciones (6.18) y (6.68), nos conducía a  $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ . Siendo así, podremos tomar la ecuación (6.68) y añadirle una constante que multiplique a  $g_{\mu\nu}$ . Por lo tanto, esto significa que:

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6.79)$$

En la sección anterior, haber considerado  $\Lambda = 0$ , suponía contener sólo términos que son lineales en las segundas derivadas de  $g_{\mu\nu}$ , lo que no sucede ahora. Entonces:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (6.80)$$

siendo  $\Lambda$  una nueva constante universal de la naturaleza conocida como CONSTANTE COSMOLÓGICA.

La constante cosmológica se calcula a partir del ratio de densidad de energía oscura, la Constante de Hubble y la velocidad de la luz mediante la expresión:

$$\Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_{\Lambda_0} \approx 1,1056 \cdot 10^{-52} [m^{-2}] \quad (6.81)$$

actualmente para la constante de Hubble y el ratio de densidad son los proporcionados por las medidas del satélite Planck:

- $H_0 = 67,66 (km/s)/Mpc$
- $\Omega_{\Lambda_0} = 06889$

La constante cosmológica aparece en unidades de inverso de tiempo al cuadrado, por lo tanto se la suele multiplicar por  $c^2$ , entonces:

$$\Lambda \rightarrow \Lambda c^2 \approx 9,9367 \cdot 10^{-35} [s^{-2}] \quad (6.82)$$

Si tomamos la ecuación (6.16) vemos que  $p = -\rho c^2$ . Esto significa que el tensor energía-impulso viene dado por:

$$T_{\mu\nu} = -p g_{\mu\nu} \quad (6.83)$$

Por lo tanto, podemos interpretar la constante cosmológica como:

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\frac{\Lambda}{\kappa} g_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \implies \rho_{vac} = -\frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (6.84)$$

Podemos escribir, finalmente, las ecuaciones del campo gravitacional de la siguiente manera:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa (T_{\mu\nu}^{(mat)} + T_{\mu\nu}^{(vac)})} \quad (6.85)$$

Ecuación general del campo de Einstein

Es importante destacar que esta práctica en su conjunto forma la base matemática de la **Teoría de la Relatividad General**.

# Capítulo 7

## Aplicaciones en la Ingeniería

“IF YOU WANT TO FIND THE SECRETS OF THE UNIVERSE,  
THINK IN TERMS OF ENERGY, FREQUENCY AND VIBRATION.”

**Nikola Tesla**  
**(1856-1943)**

## 7.1. El electromagnetismo de Maxwell

Hasta el descubrimiento de las ondas electromagnéticas, todas las experiencias con los movimientos ondulatorios indicaban que se necesitaba un medio material para la propagación de las ondas, a medida que se fue aceptando el carácter ondulatorio de la luz, fue natural suponer que alguna clase de medio etéreo llenaba todo el espacio (incluyendo el vacío). El descubrimiento de la polarización había puesto en evidencia el carácter transversal de las ondas luminosas.

El éter, para ser soporte de ondas transversales, debía ser un medio elástico de propiedades muy enigmáticas. Por un lado debía tener gran rigidez para dar lugar a la elevada velocidad de propagación pero además debía ser lo suficientemente tenue como para ser prácticamente intangible y permitir el curso de los planetas sin pérdidas aparentes de energía. La ausencia de ondas longitudinales en este medio elástico era otra fuente de controversias. En el interior de las sustancias transparentes a la luz, las propiedades del éter debían modificarse para dar cuenta del cambio de la velocidad de propagación de acuerdo con la ley de Snell.

Una cuestión importante era establecer la forma en la que el éter interactuaba con los cuerpos. En un comienzo se pensó que el éter no era modificado por el paso de un cuerpo sino que penetraba todos los cuerpos permaneciendo inmutable en un estado que bien podría considerarse de reposo absoluto. La universalidad e inmutabilidad del éter parecían conferirle la calidad de sistema de referencia absoluto, en el sentido newtoniano del término. Como la detección directa del éter parecía imposible, los experimentos se encaminaron a detectar, al menos, el movimiento de la Tierra con respecto al éter. Como la velocidad de propagación interviene en la ley de Snell, François Arago (1786-1853) pensó que la refracción de un rayo sería sensible al movimiento de la sustancia refractante. Basándose en esta idea, hacia 1810 realizó experimentos que no permitieron detectar el movimiento de la Tierra con respecto al éter. Las ideas básicas de James Clerk Maxwell acerca del campo electromagnético se publicaron por primera vez en 1862, en los siguientes 40 años, la estructura matemática de las leyes de la electricidad y el magnetismo se desarrollaron gradualmente, en particular por Hendrik Antoon Lorentz, y muchas consecuencias de la teoría se observaron de manera experimental.

*Las Ecuaciones de Maxwell muestran que los campos eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de ondas.* Se llega así al concepto de ondas electromagnéticas y, por las propiedades observadas para las mismas, se acepta que la luz es un tipo particular de onda electromagnética. *Maxwell sintió la necesidad de que un medio material fuese el soporte de las ondas electromagnéticas y lo denominó éter.* La velocidad de propagación  $c$ , de la onda respecto del éter debía considerarse una propiedad mecánica del medio. La existencia del éter introduce un sistema de referencia preferencial para las

ondas electromagnéticas, que es aquel en que el éter se encuentra en reposo.

*CITA: La teoría de la relatividad especial debe su origen a las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. (ALBERT EINSTEIN)*

### 7.1.1. Las Leyes de Maxwell

Dada una densidad de cargas eléctricas  $\bar{\rho}(\vec{x}, t)$  y una densidad de corriente  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ , las leyes de Maxwell para los campos eléctricos  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  y magnéticos  $\vec{H}(\vec{x}, t)$  vienen dadas de forma generalizada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\kappa_0\rho \quad (7.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\kappa_2 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi\kappa_1 \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi\kappa_0} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (7.4)$$

(Con referencia a las constantes  $k_i$  referirse al sistema de unidades electromagnéticas situado en (8.3) )

Las relaciones constitutivas son:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu \vec{H} & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \mu &= \mu_o \mu^r & \varepsilon &= \varepsilon_o \varepsilon^r \end{aligned} \quad (7.5)$$

(Constantes Universales (8.1) )

Para nuestro análisis emplearemos las unidades de Lorentz-Heaviside lo que implica considerar  $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$ , por lo tanto las ecuaciones de Maxwell podrían reescribirse de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (7.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \quad (7.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \quad (7.9)$$

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial consisten de 8 ecuaciones diferenciales lineales acopladas, donde en general se toma como condiciones de contorno que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  tienden a cero en el infinito (para sistemas infinitos).

Utilizando el Teorema de Stokes o del rotor y el Teorema de Gauss o de la divergencia sobre un campo vectorial  $\vec{A}$ :

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d^3x = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} d^2x \longrightarrow \text{Teorema de Gauss} \quad (7.10)$$

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} d^2x = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} \longrightarrow \text{Teorema de Stokes} \quad (7.11)$$

El teorema de la divergencia (7.10) relaciona la integral de una función sobre una superficie con la integral de una combinación de derivadas sobre el interior del conjunto, mientras que el teorema de Stokes (7.11) relacionando la integral sobre una frontera con la integral de una función "derivada" sobre el interior de la región limitada por la frontera

Las ecuaciones de Maxwell son *locales* (*puntuales*), aún así vamos a reescribir el paquete de ecuaciones (7.6), (7.7), (7.8) y (7.9) en su forma integral dado que nos resultará más intuitivo para explicar los fenómenos y aplicaciones en la ingeniería:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} d^2x = \iiint_V \rho d^3x \quad (7.12)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} d^2x \quad (7.13)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2x = 0 \quad (7.14)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{c} \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2x + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} d^2x \quad (7.15)$$

Es decir:

$$Q = \iiint_{\Omega} \rho d^3x \propto \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{\rho}'(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (7.16)$$

La tercera ley de Maxwell (7.14) nos intenta dar el equivalente magnético de la ley de Gauss. Sin embargo, aquí vemos que el lado derecho de la ecuación, que correspondería al término de la fuente del campo magnético, es cero. Dicho de otra manera, el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada siempre es cero, no existe

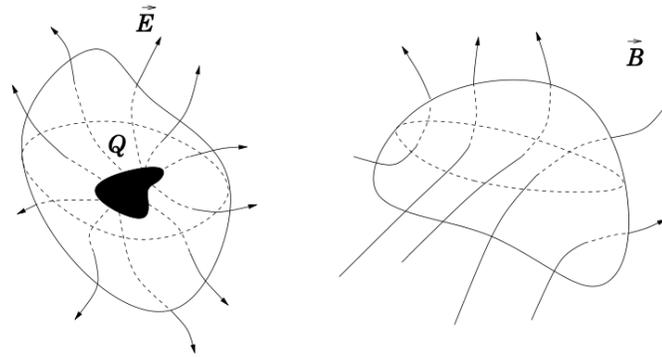


Figura 7.1: Estas expresiones (7.12) y (7.14) nos dice que el flujo del campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada dentro de la superficie, mientras que el flujo del campo magnético  $\vec{B}$  a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero.

un equivalente magnético de una carga eléctrica. Mientras que las cargas eléctricas positivas y negativas pueden existir separadas e independientes unas de otras como se ve en (7.13), los polos norte y sur de un imán siempre aparecen en parejas. En otras palabras, no existen fuentes ni sumideros para los campos magnéticos y las líneas de campo o bien son cerradas, o se extienden hasta el infinito.

*Nota: (En la física moderna existen soluciones de monopolos magnéticos con propiedades muy interesantes propuestas por Dirac pero no hay hasta el momento ninguna evidencia experimental de su existencia ).*

La expresión (7.15), ésta anuncia la ley de Ampere; el primer término de la derecha de la ecuación, nos dice que la fuente del campo magnético es la corriente eléctrica. Es decir, la integral de  $B$  a lo largo de una curva cerrada  $C$  es igual al flujo de corriente eléctrica a través de la superficie cuyo contorno es la curva  $C$ .

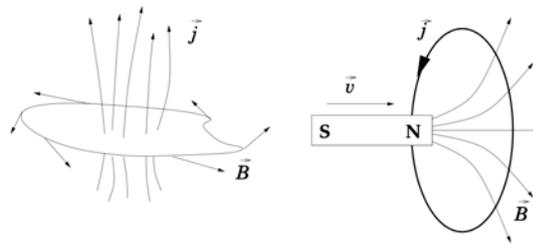


Figura 7.2: Ley de Ampere y Ley de Faraday: Una corriente eléctrica a través de una superficie genera un campo magnético a lo largo de la curva que bordea la superficie, mientras que la variación de flujo magnético a través de una superficie induce una corriente eléctrica a lo largo de la curva.

La ley de Faraday, ecuación (7.13), dice que un cambio en el flujo magnético a través de una superficie  $S$  induce un campo eléctrico rotacional alrededor de la curva que bordea  $S$ . Este campo eléctrico rotacional genera una corriente  $\vec{j}$  que a su vez causa a través de la ley de Ampere un campo magnético. El sentido de la corriente  $\vec{j}$  es tal que el campo magnético causado intenta compensar el cambio de flujo del campo original. Las corrientes eléctricas inducidas por cambio de flujos magnéticos a través de una superficie son el principio básico detrás de una dinamo y forman la base del motor eléctrico.

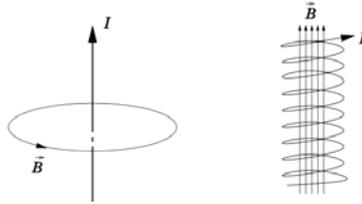


Figura 7.3: Ley de Ampere: un campo magnético rotacional alrededor de un conductor lineal infinito y un campo magnético constante en el interior de un solenoide.

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{n} d^2x \longrightarrow B = \frac{I}{2\pi cr} \quad (7.17)$$

El término de Maxwell como corrección a la Ley de Ampere:

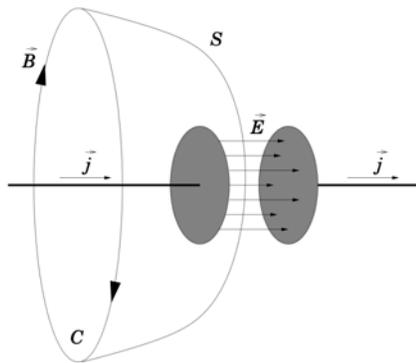


Figura 7.4: El campo magnético  $\vec{B}$  a lo largo de una curva  $C$  alrededor del conductor con una corriente  $\vec{j}$  no es igual al flujo de la corriente pasando por la superficie  $S$  si  $S$  pasa entre las dos placas de un condensador. La carga que se acumula en el condensador crea un cambio en el campo eléctrico, que es el responsable de generar el campo magnético  $B$ .

## 7.2. Cantidades Conservadas

Las mismas leyes de Maxwell indican por su propia estructura que existen ciertas cantidades conservadas. Tomando la divergencia de la Ley de Ampere-Maxwell, ecuación (7.9), y haciendo uso de la identidad vectorial del apartado (8.2):

$$\begin{aligned} c\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} &= 0 \\ \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho} &= 0 \end{aligned} \quad (7.18)$$

O bien, en su versión integral:

$$\boxed{\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot \vec{n} d^2x = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho d^3x} \quad (7.19)$$

Dicho de otra manera, el ritmo de cambio de carga en un volumen  $V$  es igual al flujo de corriente que pasa por la superficie que bordea el volumen  $V$ . Esta expresión no sólo *nos dice que la carga eléctrica está conservada*, sino que también *nos dice cómo está conservada*. En otras palabras, nos indica a dónde ha ido la parte que falta: la posible pérdida (o ganancia) de carga en el volumen debido al flujo de corriente eléctrica a través de la frontera, dado que para poder derivar esta ley de conservación hemos utilizado explícitamente el término de Maxwell de la expresión (7.9).

## 7.3. Vector de Poynting

Por otra parte, ya que el campo electromagnético es un efecto físico real, no es de extrañar que se le pueda asignar propiedades físicas tales como energía o momento, por lo tanto, podemos tomar la expresión para la energía del campo electromagnético de las propias leyes de Maxwell y multiplicar las ecuaciones (7.7) y (7.9) por los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$  respectivamente, esto es:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{B} \cdot \left( -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \right) = -\frac{1}{c} \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} \\ \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{E} \cdot \left( \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \right) = \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} \end{aligned}$$

Restando ambas expresiones y haciendo uso de la identidad vectorial del apartado (8.1), tenemos que:

$$c\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{1}{2}\partial_t \left( \|\vec{E}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 \right) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Definimos entonces:

- ▶  $c\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \rightarrow$  Vector de Poynting  $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$
- ▶  $\frac{1}{2}\partial_t(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \rightarrow$  Densidad de Energía Electromagnética  $\rightarrow \partial_t \vec{E}_{em}$
- ▶  $\vec{j} \cdot \vec{E} \rightarrow$  Potencia Mec. por unidad de volumen  $\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{E}_{cin}$

Finalmente, obtenemos que el ritmo de cambio de energía cinética de las partículas cargadas más el cambio de energía electromagnética respecto del tiempo en un volumen es igual al flujo de energía a través de dicha superficie, esto es, en su forma diferencial:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \partial_t \vec{E}_{em} + \frac{d}{dt} \vec{E}_{cin} = 0} \quad (7.20)$$

O bien, en su forma integral:

$$\boxed{-\oint_{\partial S} \vec{S} \cdot \vec{n} d^2x = \iiint_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \|\vec{E}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 \right) d^3x + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x} \quad (7.21)$$

*CITA: Cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, posee su correspondiente ley de conservación. (EMMY NOETHER)*

## 7.4. Potenciales electromagnéticos e invariancia de Gauge

Tomemos de las leyes de Maxwell, la ley de Faraday (7.7) y la ley de la divergencia (7.8) y escribamos el conjunto de una forma más accesible haciendo uso de un nuevo artilugio matemático que mencionaremos a continuación.

El hecho de que la divergencia de  $\vec{B}$  siempre sea cero, implica, por las propiedades de divergencias y rotacionales, que podemos escribir  $\vec{B}$  como el rotacional de algún campo  $\vec{A}$ , es decir:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 &\longrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}\end{aligned}\quad (7.22)$$

Sustituyendo la expresión obtenida (7.22) en (7.7), tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{\nabla} \times \left( \underbrace{\vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}}_{-\vec{\nabla} \phi} \right) &= 0\end{aligned}\quad (7.23)$$

Por las mismas propiedades de rotacionales y gradientes, se ve que la combinación  $\vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{A}$  es el gradiente de un campo  $-\phi$ , donde el signo menos se introduce por futura conveniencia. En otras palabras, podemos escribir el campo eléctrico como:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}\quad (7.24)$$

Los campos auxiliares  $\phi$  y  $\vec{A}$  son los llamados potenciales electromagnéticos. Nosotros nos apoyaremos en este concepto para desarrollar la teoría de Maxwell.

Dado  $\phi$  y  $\vec{A}$ , los campos electromagnéticos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  quedan unívocamente determinados a través de las expresiones (7.22) y (7.24) pero es interesante notar que, por el contrario, dados los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , ni  $\phi$  y  $\vec{A}$  están determinados unívocamente. Si cambiamos los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  por otros potenciales  $\phi'$  y  $\vec{A}'$  de manera tal que estén relacionados con los originales, tenemos que:

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi + \partial_t \Lambda \quad \vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} - c \vec{\nabla} \Lambda \quad (7.25)$$

siendo  $\Lambda = \Lambda(\vec{x}, t)$  una función arbitraria, entonces los campos eléctricos y magnéticos  $\vec{E}'$  y  $\vec{B}'$  generados por estos potenciales  $\phi'$  y  $\vec{A}'$  toman la forma:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= -\vec{\nabla} \phi' - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}' = -\vec{\nabla} (\phi + \partial_t \Lambda) - \frac{1}{c} \partial_t (\vec{A} - c \vec{\nabla} \Lambda) = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} = \vec{E} \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} - c \vec{\nabla} \Lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} - c \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}\end{aligned}\quad (7.26)$$

Se ve claramente que los potenciales  $\phi'$  y  $\vec{A}'$  dan exactamente los mismos campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  que  $\phi$  y  $\vec{A}$ . Es más, dado que  $\Lambda$  es una función arbitraria, hay infinitos potenciales

que dan todos los mismos campos electromagnéticos y por lo tanto se respetaría el mismo sentido físico del problema. Esa transformación (7.25) de simetría de gauge es la evidencia de que dicha transformación en los potenciales no genera un cambio en los campos y por ende en las fuerzas.

Para completar un poco la idea primordial, deberíamos reemplazar la expresión (7.24) en (7.6) y (7.22) con (7.24) en (7.9) para obtener las soluciones inhomogéneas restantes del paquete de ecuaciones de Maxwell. Nos va a ser de utilidad recordar la identidad vectorial del apartado (8.3) para llegar a la solución buscada:

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A} \right) &= \rho \\ -\vec{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c}\partial_t(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= \rho \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} \\ \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) &= \frac{1}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t \left( -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A} \right) \\ -\vec{\nabla}^2\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= \frac{1}{c}\vec{j} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} \\ -\vec{\nabla}^2\vec{A} + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{\nabla}\phi \right) + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} &= \frac{1}{c}\vec{j} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Como podemos ver, la expresión (7.27) es una ecuación de difusión y la (7.28) sería una ecuación de onda de no ser por el término  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{\nabla}\phi$ . Sin embargo, la invariancia gauge nos proporciona la libertad de poder cambiar los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  de modo tal que satisfagan la condición de interés, es decir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{\nabla}\phi = 0 \longrightarrow \text{Gauge de Lorentz} \quad (7.29)$$

Por lo tanto, habiendo implementado esta condición, las ecuaciones (7.27) y (7.28) adoptan la forma de ecuaciones de ondas inhomogéneas en 3 dimensiones:

$$-\vec{\nabla}^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = \frac{1}{c}\vec{j} \quad -\vec{\nabla}^2\phi + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi = \rho \quad (7.30)$$

Finalmente, podemos recolectar los resultados obtenidos y recuperar las ecuaciones de Maxwell en función de los potenciales:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi - \vec{\nabla}^2 \phi = \rho \quad (7.31)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \quad (7.32)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (7.33)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{j} \quad (7.34)$$

Las ecuaciones (7.31) y (7.34) nos dicen cómo los potenciales interactúan con las cargas y las corrientes, mientras que (7.32) y (7.33) nos da la relación entre los potenciales y los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  respectivamente.

## 7.5. Electrodinámica y Relatividad

En este apartado, vamos a emplear la notación covariante y contravariante proveniente del espacio real de Riemann, lo cual presupone escribir los invariantes tales como  $K_\mu K_\mu$  en la forma  $K_\mu K^\mu$  o  $K^\mu K_\mu$ . El tensor métrico será asignado mediante  $g = (1, -1, -1, -1)$ . Por lo tanto, definiendo el cuadrivector corriente como  $J^\nu = \rho_0 u^\nu$ , siendo  $\rho_0$  la densidad de carga propia la cual es medida por un observador en reposo instantáneo respecto a ella. Siendo que  $J_\nu J^\nu = \rho_0^2 u_\nu u^\nu = \rho_0^2 c^2$  es invariante por construcción, podemos representar este cuadrivector de la siguiente manera:

$$J_\nu = \rho_0(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = (c\rho, \rho \mathbf{v}) = (c\rho, \mathbf{J}) \longrightarrow \rho = \rho_0 \gamma \quad (7.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \frac{\partial J^i}{\partial x^i} + \frac{\partial J^0}{\partial x^0} = \frac{\partial J^\nu}{\partial x^\nu} \longrightarrow \boxed{\partial_\nu J^\nu = 0} \quad (7.36)$$

Se puede ver como, de esta manera, queda de manifiesto la ecuación de continuidad en su forma covariante. De la misma manera se pueden escribir los cuadrivectores potenciales escalar y vectorial:

$$A^\nu = (\phi, \mathbf{A}) \quad (7.37)$$

y por lo tanto, el gauge de Lorentz en su forma covariante se puede escribir como:

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (7.38)$$

generalizando dicha idea, podremos escribir los campos electromagnéticos y los potenciales como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \implies E_i = -\frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^i}{\partial t} \\ E_i &= -\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^0} = \frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0} \implies E_i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \equiv \mathbf{F}^{i0} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Siendo que:

$$K_\nu = K^\mu g_{\mu\nu} \longrightarrow K^i = -K_i \longrightarrow K^0 = K_0 \quad (7.40)$$

Para el hallar las componentes del campo magnético  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  hacemos:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = -\frac{\partial A^3}{\partial x^2} + \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \implies B_1 = -\partial^2 A^3 + \partial^3 A^2 \equiv -\mathbf{F}^{23} \\ B_2 &= -\frac{\partial A^3}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^3} \implies B_2 = -\partial^1 A^3 + \partial^3 A^1 \equiv -\mathbf{F}^{31} \\ B_3 &= \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \implies B_3 = -\partial^1 A^2 + \partial^2 A^1 \equiv -\mathbf{F}^{12} \end{aligned}$$

Reunimos las 3 ecuaciones de  $E_i$  y de  $B_i$  y tenemos:

$$E_i = \mathbf{F}^{i0} \quad \mathbf{F}^{ij} = -B_k \quad (7.41)$$

o bien, se puede condensar en la forma:

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad ; \quad \mathbf{F}^{\mu\nu} = -\mathbf{F}^{\nu\mu} \quad (7.42)$$

Siendo las propiedades del tensor de campo electromagnético:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = -\mathbf{F}_{\nu\mu} \quad \mathbf{F}_\nu^\mu = -\mathbf{F}_\nu^\mu \quad \mathbf{F}^{i0} = -\mathbf{F}_{i0} = \mathbf{F}_{0i} \quad \mathbf{F}^{12} = -\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{21} \quad (7.43)$$

Por lo tanto, podremos escribir  $\mathbf{F}^{\mu\nu}$  en su forma matricial como:

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

### 7.5.1. Las Ecuaciones de Maxwell en su forma covariante

Consideremos las ecuaciones de Maxwell que poseen fuentes y, dado que las densidades  $\mathbf{J}$  y  $\rho$  forman un solo cuadvivector (ver expresión (7.35)), podremos escribir dichas ecuaciones de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \implies \partial_i \mathbf{F}^{i0} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^0 \quad (7.45)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \implies \partial_\mu \mathbf{F}^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^i \quad (7.46)$$

Dicho esto, las ecuaciones de Maxwell *con fuentes* en su forma manifiestamente covariante podremos expresarlas de la siguiente manera:

$$\boxed{\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^\nu} \quad (7.47)$$

Tenemos, por otra parte, las ecuaciones de Maxwell *sin fuentes*:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (7.48)$$

que se pueden condensar en una ecuación interna de la siguiente manera:

$$\partial^\mu \mathbf{F}^{\nu\rho} + \partial^\rho \mathbf{F}^{\mu\nu} + \partial^\nu \mathbf{F}^{\rho\mu} = 0 \quad (7.49)$$

La estructura cíclica que se observa en los índices  $\mu\nu\rho$  en la ecuación interna nos sugiere definir un tensor análogo al de *Levi Civitá* pero en cuatro dimensiones, esto es:  $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ , siendo que:  $\varepsilon_{01234} = 1$ , por lo tanto:

$$*\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \mathbf{F}^{\sigma\rho} \quad (7.50)$$

Apoyándonos en esta última expresión, reescribiremos las ecuaciones de Maxwell *sin fuentes* de la siguiente manera:

$$\boxed{\partial_\mu * \mathbf{F}^{\mu\nu} = 0} \quad (7.51)$$

De esta manera, en (7.47) y (7.51) quedan definidas las 4 ecuaciones de Maxwell en su forma covariante.

## 7.6. Ecuaciones de onda para un medio indefinido

El tema que trataremos en detalle en este capítulo tiene que ver con las comunicaciones. Estudiaremos la propagación de ondas electromagnéticas infiriendo las correcciones relativistas necesarias para explicar los fenómenos de transmisión de información por radiación emitido por los modelos elementales de antenas.

Tomaremos las ecuaciones de Maxwell vistas en el apartado (7.1.1) y haremos uso de las identidades vectoriales (8.4) debidamente para encontrar las ecuaciones de onda para medios indefinidos:

### Ecuación para E

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} \\
 -\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\
 -\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\
 -\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\
 -\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)
 \end{aligned}$$

Si el es medio libre, la consideración que se adopta para el vector de corriente de conducción es:  $\vec{J} = 0$ , para nuestro caso, como se trata de un medio indefinido:  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ .

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad (7.52)$$

Esta es la expresión de onda del campo eléctrico para cualquier medio. Se puede apreciar que la componente de conducción de la ecuación de onda esta asociada con el término en derivada primera y, la componente de radiación esta asociada con el término en derivada segunda de dicha ecuación.

### Ecuación para H

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla}^2 \vec{H} \\
 -\vec{\nabla}^2 \vec{H} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\
 -\vec{\nabla}^2 \vec{H} &= \vec{\nabla} \times \left( \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\
 -\vec{\nabla}^2 \vec{H} &= \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} \\
 -\vec{\nabla}^2 \vec{H} &= \sigma \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\
 \vec{\nabla}^2 \vec{H} &= \sigma \mu \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) + \varepsilon \mu \left( \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \right)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión de onda del campo magnético para cualquier medio queda de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}} \quad (7.53)$$

Para tener otra visión de lo antedicho, podemos reescribir las expresiones (7.52) y (7.53) en RSP (Régimen Senoidal Permanente), es decir, en función de la frecuencia.

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix}} \quad (7.54)$$

#### 7.6.1. Constante de propagación $\gamma$

La constante de propagación  $\gamma$  describe en su totalidad el fenómeno de propagación de la onda. Esta constante tiene asociados los factores  $\alpha$  [*Nepers/m*] y  $\beta$  [*Rad/m*], estos indican su coeficiente de atenuación y de rotación de fase respectivamente:

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \quad (7.55)$$

Observando la analogía entre las ecuaciones de onda  $E$  y  $H$ , podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \underbrace{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}_{\gamma^2} \vec{E} \\
 \gamma^2 &= j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) = (\alpha + j\beta)^2
 \end{aligned}$$

Trabajando analíticamente las expresiones, se deduce que:

$$-\mu\epsilon\omega^2 = \alpha^2 - \beta^2 \quad \mu\sigma\omega = 2\alpha\beta \longrightarrow \beta = \frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}$$

Sustituyendo adecuadamente tenemos que:

$$\alpha^2 - \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}\right)^2 = -\omega^2\mu\epsilon$$

$$4\alpha^4 + 4\alpha^2\omega^2\mu\epsilon - \omega^2\mu^2\sigma^2 = 0$$

Esta expresión es muy sencilla de resolver mediante el método de la resolvente, quedándose con el término positivo de la constante de atenuación  $\alpha$  tenemos que:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\omega^2\mu\epsilon \left[ \sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} + 1} - 1 \right] \longrightarrow \alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} - 1 \right]} \quad (7.56)$$

Realizando un proceso similar vamos a encontrar la constante de rotación de fase  $\beta$ :

$$-\mu\epsilon\omega^2 = \alpha^2 - \beta^2 \quad \mu\sigma\omega = 2\alpha\beta \longrightarrow \alpha = \frac{\omega\mu\sigma}{2\beta}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\omega^2\mu\epsilon \left[ \sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} + 1} + 1 \right] \longrightarrow \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1 \right]} \quad (7.57)$$

## 7.7. Potenciales Retardados

Recordando las ecuaciones de onda inhomogéneas (7.30), trabajaremos sobre ellas y utilizaremos como constante  $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \omega/c$ . Con esta selección, estas expresiones se transformaran en las ecuaciones de Helmholtz inhomogéneas.

$$\nabla^2 \vec{A} + k_0^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \nabla^2 \Phi + k_0^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.58)$$

Recordemos que para tener invarianza de Lorentz, las derivadas temporales y espaciales deben tratarse en el mismo orden, por lo tanto es conveniente optar por el gauge o calibración de Lorentz:

$$\square A = \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \square \phi = \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \quad (7.59)$$

Las expresiones (7.59) son de la forma 4-dimensional que involucra el operador D'Alembertiano  $\square(\cdot)$ , un análogo 4-dimensional del Laplaciano en el espacio Minkowski.

En el caso estacionario, estos potenciales se reducen a ecuaciones de Poisson y sus respectivas soluciones son:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{\Omega'} \frac{\rho'(\mathbf{r}')}{R} d^3x' \quad (7.60)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \implies \mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d^3x' \quad (7.61)$$

Cuando trabajamos el caso no estático, debe tenerse en cuenta que la señal electromagnética viaja a la velocidad de la luz. Por lo tanto, si queremos evaluar los potenciales en un tiempo  $t$  en una cierta posición  $\mathbf{r}$ , no es el estado de la fuente en el tiempo  $t$  el que realmente cuenta, sino su condición en un cierto tiempo anterior llamado  $t_r = t'$  (el tiempo retardado), en el cual el “mensaje” fué enviado. Como el mensaje viaja una distancia  $R$  a una velocidad  $c$ , por lo tanto:

$$t' = t_r = t - \frac{R}{c} \quad R \equiv |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (7.62)$$

De modo que una generalización para los potenciales eléctrico y magnético sería:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{\Omega'} \frac{\rho'(\vec{r}', t_r)}{R} d^3x' \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\vec{J}'(\vec{r}', t_r)}{R} d^3x' \quad (7.63)$$

Estas soluciones retardadas dadas por (7.63) solo serán válidas en el gauge de Lorentz. De momento, demostraremos que los potenciales satisfacen las ecuaciones de onda inhomogéneas (7.59).

Comenzaremos trabajando con el potencial escalar hallando su Laplaciano:  $\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}, t)$ :

$$\nabla \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \left[ \nabla \rho \frac{1}{R} + \rho \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right] d^3x' \quad (7.64)$$

$$\partial_i \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x_i} \quad ; \quad \nabla \rho(\vec{r}', t_r) = \dot{\rho} \nabla t_r = -\frac{\dot{\rho}}{c} \nabla R \quad (7.65)$$

donde  $\dot{\rho}$  denota la derivada con respecto al tiempo,  $\partial t = \partial t_r$  ya que (7.62).

$$\nabla R = \check{R} \quad ; \quad \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\check{R}}{R^2} \quad (7.66)$$

$$\nabla \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left[ -\frac{\dot{\rho} \check{R}}{c R} - \rho \frac{\check{R}}{R^2} \right] d^3 x' \quad (7.67)$$

Aplicándole la divergencia obtenemos el Laplaciano: Id. vectorial (8.6):

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 x' \left\{ \left[ -\frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left( \frac{\check{R}}{R} \right) + \frac{1}{c} \frac{\check{R}}{R^2} \cdot (\nabla \rho) \right] + \left[ \rho \nabla \cdot \left( \frac{\check{R}}{R^2} \right) + \frac{\check{R}}{R^2} \cdot (\nabla \rho) \right] \right\}$$

Siendo alguno de estos términos:

$$\nabla \dot{\rho} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \nabla R = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \check{R} \quad ; \quad \nabla \cdot \left( \frac{\check{R}}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \quad ; \quad \nabla \cdot \left( \frac{\check{R}}{R^2} \right) = 4\pi \delta^3(R) \quad (7.68)$$

Por lo tanto, reemplazaremos las expresiones (7.65), (7.66) y (7.68) en el Laplaciano del potencial, pues:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 x' \left\{ \left[ \frac{1}{c} \frac{\dot{\rho}}{R^2} - \frac{\ddot{\rho} \check{R} \cdot \check{R}}{c^2 R} \right] + \left[ 4\pi \rho \delta^3(\vec{R}) - \frac{1}{c} \dot{\rho} \frac{\check{R}}{R^2} \cdot \nabla R \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 x' \left\{ \left[ \cancel{\frac{\dot{\rho}}{c R^2}} - \frac{\ddot{\rho}}{c^2 R} \right] + \left[ 4\pi \rho \delta^3(\vec{R}) - \cancel{\frac{\dot{\rho}}{c R^2} \underbrace{\check{R} \cdot \check{R}}_1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 x' \left\{ \frac{\ddot{\rho}}{c^2 R} - 4\pi \rho \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \iiint d^3 x' \frac{1}{c^2 R} \frac{\partial^2 \rho(\vec{r}', t_r)}{\partial t^2} - \iiint d^3 x' 4\pi \rho \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint d^3 x' \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{R} - 4\pi \rho(\vec{r}) \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 x' \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{R} \right] - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \implies \square \phi = \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

De este modo queda demostrado que el potencial retardado escalar definido en (7.63) es solución de la ecuación de onda. Mediante un procedimiento análogo se podrá demostrar que se satisface también para  $\square \vec{A}$ .

## 7.8. Potenciales generados por cargas puntuales

### 7.8.1. Potenciales de Liénard -Wiechert

Consideremos una carga moviéndose en una trayectoria descrita por el radio vector  $\vec{r}'(t')$  como mostraremos a continuación. Para una carga puntual, la localización es una función que depende del tiempo y denominaremos  $\delta^3(t)$ .

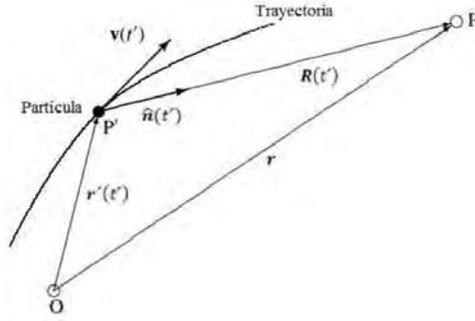


Figura 7.5: Descripción de la trayectoria de la partícula.

Asumamos que la carga puntual  $q_e$  ocupa la posición  $\vec{r}'(t')$  y se desplaza a una velocidad  $\vec{v}_e(t')$ , la cual genera un campo eléctrico  $\vec{E}$  y un campo magnético  $\vec{B}$  que se desea medir en el punto  $P$  en un tiempo  $t$ . Las densidades asociadas a dicha partícula serán:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = q_e \dot{\vec{R}}(t') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'(t')) \longrightarrow \dot{\vec{R}}(t') = \vec{v}_e(t') = \frac{d\vec{R}}{dt'} \quad (7.69)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = q_e \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'(t')) \quad (7.70)$$

Observando el gráfico y haciendo un análisis geométrico, tenemos que:

$$r = r'(t') + R(t') = cte \quad t' \equiv t - \frac{|\vec{R}(t')|}{c} \quad (7.71)$$

El campo recibido en el instante  $t$  por el observador  $P$  tuvo que ser emitido por la fuente  $P'$  en el tiempo anterior  $t'$  dada por la relación (7.71). Es importante resaltar que, para calcular los campos en el tiempo  $t$  en un punto de observación fijo  $P$ , se tiene que conocer la posición y el movimiento de la carga en el tiempo de emisión  $t'$  cuya trayectoria es dada por el vector  $\vec{r}'(t')$

Imaginemos, de momento, que deseamos calcular el tiempo en el cual permanece la contribución del potencial de una partícula  $q$  que posee un radio  $b$  en  $\vec{r}$ , esto es:

Considerando a la carga en reposo, esto es:  $\Delta t'_0 = \frac{2b}{c}$  o en movimiento  $\vec{v} = c\vec{\beta}$ , donde esta velocidad  $\vec{v}$  posee una componente radial que se describe mediante:  $\vec{v}_r = \hat{n}\vec{v}$  o

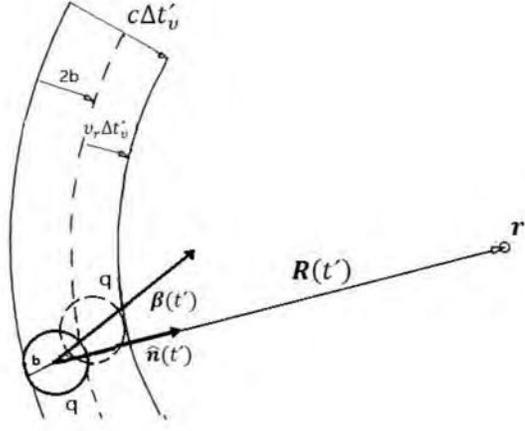


Figura 7.6: Radiación emitida por la partícula.

lo que es lo mismo:  $\vec{v}_r = \hat{n} \cdot c\vec{\beta}$  siendo  $\hat{n}$  el versor que apunta desde la carga hasta el punto de observación. Por lo tanto, el tiempo de contribución será:

$$\Delta t'_v = 2b + v_r \Delta t'_0 \quad (7.72)$$

$$\Delta t'_v = \frac{2b}{c - v_r} = \frac{2b}{c(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} = \frac{2b}{c - v_r} = \frac{2b}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \rightarrow \frac{\Delta t'_v}{\Delta t'_0} = \frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (7.73)$$

Es interesante destacar que, haciendo tender el radio  $b$  de la carga puntual  $q$  a cero, tenemos el equivalente de contribución de una carga puntual:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(t')[1 - \hat{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t')]} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{ret} \quad (7.74)$$

donde dicha expresión debe ser evaluada en  $t'$  (ver 7.71) para obtener el potencial en el tiempo posterior  $t$ . De la misma manera, tomamos  $\vec{j}(t') = q\dot{\vec{R}}(t') = q\vec{v}(t')$  y conseguimos el vector potencial magnético para una carga en movimiento:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{q\dot{\vec{R}}(t')}{R(t')[1 - \hat{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t')]} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{q\vec{v}}{R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{ret} \quad (7.75)$$

Estas expresiones (7.74) y (7.75) son los potenciales de Liénard- Wiechert para una carga en movimiento.

### 7.8.2. Campos asociados a cargas puntuales móviles

Recordando las ecuaciones (7.32) y (7.33), reescribiremos y trabajaremos con las expresiones (7.74) y (7.75) para hallar los campos eléctrico y magnético asociados a dichos potenciales, por lo tanto:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ \frac{q}{1 - \hat{R} \cdot \vec{v}/c} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{qc}{Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}} \right]$$

Le aplicamos el gradiente a  $\phi(\vec{r}, t)$  y dado que:  $\vec{\nabla}R = \hat{R}$  y  $\vec{\nabla} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{R}}{R^2}$ , resulta:

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left[ \frac{qc}{Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}} \right] = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})^2} \vec{\nabla}(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}) \quad (7.76)$$

Siendo  $t'$  función de  $t$  y  $r$  y debido a el arreglo visto en (7.71), se deduce:

$$R = c(t - t') \longrightarrow \vec{\nabla}R = -c\vec{\nabla}t' \quad (7.77)$$

Haciendo uso de la identidad (8.7) del apéndice, tenemos que:

$$\vec{\nabla}(\vec{R} \cdot \vec{v}) = \underbrace{(\vec{R} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}_{(1)} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{R}}_{(2)} + \vec{R} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{v})}_{(3)} + \vec{v} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{R})}_{(4)}$$

$$\begin{aligned} (1) \left[ (\vec{R} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right]_i &= (R_k \partial_k) v_i = R_k (\partial_k v_i) = R_k \frac{\partial v_i}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_k} = R_k \dot{v}_i \partial_k t' \\ &= a_i \vec{R} \cdot (\vec{\nabla}t') \longrightarrow \left[ (\vec{R} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} \right] = \vec{a} \cdot (\vec{R} \cdot \vec{\nabla}t') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{R} \right]_i &= \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} \right]_i - \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}' \right]_i = (v_k \partial_k) x_i - (v_k \partial_k) r'_i \\ &= v_k (\partial_k x_i) - v_k (\partial_k r'_i) = v_k \delta_{ki} - v_k \frac{\partial r'_i}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_k} \\ &= v_i - v_k v_i \partial_k t' = v_i (1 - v_k \partial_k t') \\ &= v_i (1 - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}t') \longrightarrow \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{R} \right] = \vec{v} (1 - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}t') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j v_k = \epsilon_{ijk} \frac{dv_k}{dt'} \frac{\partial t'}{dx_j} = \epsilon_{ijk} \dot{v}_k \partial_j t' \\ &= \epsilon_{ijk} (\partial_j t') a_k \longrightarrow \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right] = (\vec{\nabla}t') \times \vec{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{R}) \right]_i &= \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{r}) \right]_i - \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{r}') \right]_i = 0 - \varepsilon_{ijk} \partial_j r'_k \\
&= -\varepsilon_{ijk} \vec{r}' \partial_j t' \longrightarrow \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{R}) \right] = -\vec{v} \times (\vec{\nabla} t')
\end{aligned}$$

Reemplazando estas cantidades obtenidas en la expresión en la identidad (8.7), nos queda:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\vec{R} \cdot \vec{v}) &= \vec{a}(\vec{R} \vec{\nabla} t') + \vec{v}(1 - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} t') + \vec{R} \times (\vec{\nabla} t' \times \vec{a}) + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\nabla} t') \\
&= \vec{v} + \vec{\nabla} t'(\vec{R} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla} t'(\vec{v} \cdot \vec{v}) \longrightarrow \vec{\nabla}(\vec{R} \cdot \vec{v}) = \vec{v} + \left[ \vec{R} \cdot \vec{a} - v^2 \right] \vec{\nabla} t' \quad (7.78)
\end{aligned}$$

Usando la ecuación (7.77) y (7.78) en (7.76), tenemos:

$$\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})^2} \left[ \vec{v} + (c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{\nabla} t' \right] \rightarrow \vec{\nabla} t' = -\frac{\vec{R}}{Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}} \quad (7.79)$$

Por lo tanto, el potencial  $\vec{\nabla} \phi$  nos queda:

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})^3} \left[ (Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}) \vec{v} + (c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{R} \right] \quad (7.80)$$

El término  $\partial_t \vec{A}$ , procediendo de manera análoga resultará:

$$\partial_t \vec{A} = \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})^3} \left[ (Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}) \left( -\vec{v} + \frac{R}{c} \vec{a} \right) + \frac{R}{c} (c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{v} \right] \quad (7.81)$$

Finalmente reemplazando (7.80) y (7.81) en (7.32), en campo eléctrico nos queda:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \left[ (c^2 - v^2) \vec{u} + \vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \left[ (c^2 - v^2) \vec{v} + (\vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{v} - (\vec{R} \cdot \vec{u}) \vec{a} \right] \quad (7.82)
\end{aligned}$$

donde  $\vec{u} \equiv c\vec{R} - \vec{v}$ . Para encontrar el campo de inducción magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  debemos calcular el rotor del vector potencial magnético  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ :

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times (\phi \vec{v}) = \frac{1}{c^2} \left[ \phi (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \phi) \right] \\ &= -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{u} \cdot \vec{R})^3} \vec{R} \times \left[ (c^2 - v^2) \vec{v} + (\vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{v} + (\vec{R} \cdot \vec{u}) \vec{a} \right]\end{aligned}\quad (7.83)$$

Siendo el algoritmo de cálculo que relaciona a ambas expresiones (7.82), (7.83):

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \left[ \check{R} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \right] \quad (7.84)$$

Es evidentemente que el campo magnético de una carga puntual es siempre perpendicular al campo eléctrico, y también es perpendicular al vector que va desde la posición retardada hasta el punto de evaluación del campo.

El primer término de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  en (7.82) es proporcional a  $(c^2 - v^2)\vec{u}$  y decae como el inverso cuadrado de la distancia a la partícula. Si la velocidad y la aceleración se anulan, este término es el único que sobrevive y se reduce al caso electrostático normal. Por esta razón, este primer término se llama usualmente el campo generalizado de Coulomb; por otro lado, dado que este término no depende de la aceleración también se le denomina campo de velocidades. El segundo término proporcional a  $\vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})$  decae como el inverso de la primera potencia de  $R$  y es por tanto, el dominante a largas distancias, este es el término responsable de la radiación electromagnética y por tanto se le denomina el campo de radiación; por otro lado, dado que es proporcional a  $\vec{a}$  se le denomina también campo de aceleraciones. La misma terminología se aplica para el campo magnético  $B(\vec{r}, t)$ .

## 7.9. Radiación emitida por un dipolo eléctrico

Consideremos una distribución uniforme y filiforme de corriente  $I dl$  que fluye solidaria al eje  $z \rightarrow dz = dl$  cuya función la podemos describir mediante  $I_0 \cos(\omega t)$ . Lo que nos proponemos es encontrar la influencia del campo electromagnético en el punto  $P$  debido a esta distribución de corriente.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \int \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi R} \vec{dl} = \int \check{e}_z \frac{\mu_0 I_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{R}{c} \right) \right]}{4\pi R} dl \\ &= \int \check{e}_z \frac{\mu_0 I_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{R}{c}}}{4\pi R} dl \rightarrow A_z = \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi R} e^{-i\omega \frac{R}{c}} e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (7.85)$$

Haremos un cambio de la variable  $R \rightarrow r$ . Observando el gráfico (7.7) y haciendo consideraciones geométricas, podemos decir que:

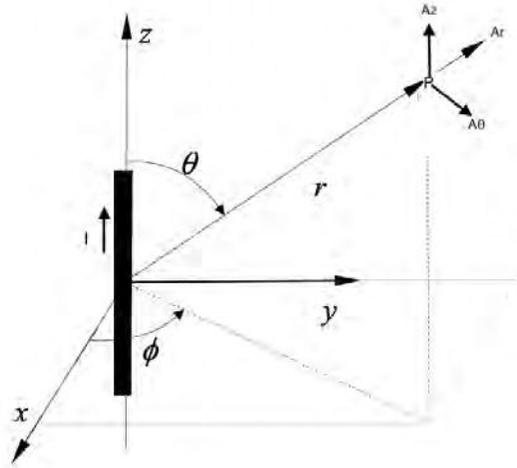


Figura 7.7: Esquema de la antena elemental de corriente. Se desea encontrar la influencia del campo electromagnético y la potencia en el punto P

$$A_r = \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \cos(\theta) e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} \quad A_\theta = -\frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \sin(\theta) e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} \quad (7.86)$$

Es útil reemplazar el término  $\frac{\omega}{c}$  por  $k$  siendo este el número de onda. Por lo tanto, nos quedaría de la siguiente manera:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} [\cos(\theta)\check{e}_r - \check{e}_\theta \sin(\theta)] e^{i(\omega t - kr)} \quad (7.87)$$

Hemos visto que se puede obtener, a través del rotor del vector potencial, el campo de inducción magnético  $\vec{B}$ . Por lo tanto, nos proponemos resolver la ecuación (7.22) para hallar la intensidad de campo magnético  $H$  en coordenadas esféricas:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{A}}{\mu_0}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \check{e}_r & r\check{e}_\theta & r \sin(\theta)\check{e}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\phi 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \check{e}_r & r\check{e}_\theta & r \sin \theta \check{e}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ \frac{1}{r} \cos(\theta) e^{-ikr} & -\frac{r'}{r'} \sin(\theta) e^{-ikr} & 0 \end{vmatrix} e^{i\omega t} \\
&= \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi} \frac{r' \sin(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \left\{ -\sin(\theta) \left[ \frac{\partial}{\partial r} e^{-ikr} \right] - \frac{1}{r} e^{-ikr} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \cos(\theta) \right] \right\} \check{e}_\phi \\
&= \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} e^{i\omega t} \left[ -(-ike^{-ikr}) \sin(\theta) + \left( \frac{1}{r} e^{-ikr} \sin(\theta) \right) \right] \check{e}_\phi
\end{aligned}$$

Con lo que  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  nos queda de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}, t) = \check{e}_\phi \frac{I_0 L}{4\pi r} \left[ ik + \frac{1}{r} \right] \sin(\theta) e^{i(\omega t - kr)}} \quad (7.88)$$

Haciendo uso de la ecuación (7.9) en función de los parámetros constitutivos en el vacío, hallaremos la expresión del campo eléctrico  $\vec{E}$ :

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \check{e}_r & r\check{e}_\theta & r \sin(\theta)\check{e}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ 0 & 0 & r \sin(\theta) H_\phi \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left[ \check{e}_r \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin(\theta) H_\phi) - r\check{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r} (r \sin(\theta) H_\phi) \right] \\
&= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left[ \check{e}_r \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \sin(\theta) \check{e}_\phi \frac{I_0 L}{4\pi r} \left[ ik + \frac{1}{r} \right] \sin(\theta) e^{i(\omega t - kr)} \right) \right] - \\
&\quad - \left[ r\check{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sin(\theta) \check{e}_\phi \frac{I_0 L}{4\pi r} \left[ ik + \frac{1}{r} \right] \sin(\theta) e^{i(\omega t - kr)} \right) \right]
\end{aligned}$$

Realizando las derivadas respecto a las variables correspondientes,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  nos queda de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = i \frac{I_0 L}{4\pi\epsilon_0\omega r} \left[ \sin(\theta) \left( k^2 - i\frac{k}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \check{e}_\theta - 2 \frac{\cos(\theta)}{r} \left( ik + \frac{1}{r^2} \right) \check{e}_r \right] e^{i(\omega t - kr)}} \quad (7.89)$$

Para encontrar la potencia media que transporta la onda es necesario trabajar con el vector de Poynting  $\langle \vec{P} \rangle$ :

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \begin{vmatrix} \check{e}_r & \check{e}_\theta & \check{e}_\phi \\ E_r & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Re (E_\theta H_\phi^* \check{e}_r - E_r H_\phi^* \check{e}_\theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Re (E_\theta H_\phi^*) &= \frac{1}{2} \Re \left[ i \frac{I_0 L}{4\pi \varepsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \sin(\theta) \left( k^2 - i \frac{k}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{I_0 L}{4\pi r} e^{-i(\omega t - kr)} \left( -i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin(\theta) \check{e}_r \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left\{ i \left[ \frac{I_0 L}{4\pi r} \right]^2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \sin^2(\theta) \left( k^2 - i \frac{k}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \left( -i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \check{e}_r \right\} \\ &= \frac{1}{2} \Re \left\{ i \left[ \frac{I_0 L}{4\pi r} \right]^2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \sin^2(\theta) \left( -ik^3 + \frac{k^2}{r} - i \frac{k}{r^2} + i \frac{k}{r^2} - \frac{k^2}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \check{e}_r \right\} \\ &= \check{e}_r \frac{I_0^2 L^2 k^3 \sin^2(\theta)}{32\pi^2 \omega \varepsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Re (E_r H_\phi^*) &= \frac{1}{2} \Re \left[ j \frac{2I_0 L}{4\pi \varepsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \sin(\theta) \cos(\theta) \left( i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{I_0 L}{4\pi r} \left( -i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin(\theta) \check{e}_\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[ i \left[ \frac{I_0 L}{4\pi r} \right]^2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \sin^2(\theta) \cos(\theta) \left( k^2 + i \frac{k}{r} - i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \check{e}_\theta \right] = 0 \end{aligned}$$

Para calcular la impedancia intrínseca de la onda en el vacío, basta con realizar el cociente entre  $E_\theta$  y  $H_\phi$ :

$$\eta_0 = \frac{|E_\theta|}{|H_\phi|} = \frac{\frac{I_0 L k^2}{4\pi \varepsilon_0 \omega r}}{\frac{I_0 L k}{4\pi r}} = \frac{k}{\omega \varepsilon_0} = \frac{1}{c \varepsilon_0} \quad (7.90)$$

Por lo tanto, deducimos que la potencia que transporta la onda es:

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{I_0 L^2 k^3 \sin^2(\theta)}{32\pi^2 \omega \varepsilon_0 r^2} \check{e}_r = \frac{\eta_0 I_0^2 \sin^2(\theta)}{8r^2} \left[ \frac{L}{\lambda} \right]^2 \check{e}_r \quad (7.91)$$

Se observa que sólo contribuyen al valor medio del vector de Poynting los términos de radiación en el desarrollo de los campos.

## 7.10. La física y la ingeniería detrás del GPS

El GPS (*Global Positioning System*) es un sistema que provee servicios de posicionamiento, navegación y temporizado a los usuarios de todo el mundo. El sistema consta de tres partes o segmentos: el segmento espacial, el segmento de control y el segmento de los usuarios.

El segmento espacial: Consiste en un conjunto de satélites que transmiten señales de radio a los usuarios. Los satélites GPS giran alrededor de la tierra en órbitas medias a una altitud de aproximadamente 20.200 km. Cada satélite da dos vueltas a la tierra por día. Estos satélites están distribuidos en seis planos orbitales equiespaciados alrededor de la tierra. Cada plano contiene cuatro posiciones ocupadas por satélites. Este arreglo de 24 posiciones asegura que los usuarios en cualquier punto de la tierra puedan ver al menos cuatro satélites en cualquier momento.

El segmento de control: Consiste en una red global de estaciones en tierra que rastrean los satélites, monitorean sus transmisiones, realizan análisis y envían comandos y datos a la constelación.

El segmento operacional de control incluye una estación maestra de control, una estación de control alternativa, 11 antenas de control y comando y 16 sitios de monitoreo.

El segmento a los usuarios: Al igual que la Internet, el GPS es un elemento esencial de la infraestructura de información global. La naturaleza libre, abierta y confiable del GPS ha llevado al desarrollo de cientos de aplicaciones que alcanzan todos los aspectos de la vida moderna. La tecnología GPS ahora está en todo, desde teléfonos celulares y relojes de pulsera hasta topadoras, contenedores de envío y cajeros automáticos.

El GPS aumenta la productividad en una amplia franja de la economía, que incluye la agricultura, la construcción, la minería, la topografía, la entrega de paquetes y la administración logística de cadenas de suministros. Las principales redes de comunicaciones, sistemas bancarios, mercados financieros y redes eléctricas dependen en gran medida del GPS para una sincronización de tiempo precisa.

El GPS salva vidas previniendo accidentes de transporte, ayudando en los esfuerzos de búsqueda y rescate, y acelerando la entrega de servicios de emergencia y ayuda en caso de desastres. El GPS es vital para el desarrollo de nuevos sistemas de transporte aéreo, especialmente para mejorar la seguridad del vuelo y aumentar la capacidad del espacio aéreo, también permite avances en objetivos científicos como el pronóstico del tiempo, el monitoreo de terremotos y la protección del medio ambiente.

Finalmente, el GPS sigue siendo crítico para las fuerzas armadas y sus aplicaciones están integradas en prácticamente todas las facetas de las operaciones militares. Casi todos los nuevos recursos militares, desde vehículos hasta municiones, vienen equipados con GPS.

### 7.10.1. Funcionamiento básico del GPS

Primeramente los satélites GPS envían una señal de radio que contiene la localización del mismo y el tiempo preciso en el momento del envío  $t_1$ , además de otro datos sobre su estado. Esta información está basada en un reloj atómico a bordo.

Las señales de radio viajan a través de espacio a la velocidad de la luz  $c = 299,792,458$  [m/s]. Los receptores de la señal anotan el tiempo de arribo de la misma  $t_2$  y calculan la distancia del satélite al receptor mediante la fórmula  $d = c(t_2 - t_1)$ . Una vez que el receptor conoce las distancias a al menos cuatro satélites, procede a calcular sus localización en la tierra en tres dimensiones.

### 7.10.2. Localización del receptor en el plano

Los satélites miden la distancia desde su posición hasta el receptor  $R$ . A continuación describimos como con esta información, y conociendo además la ubicación de los satélites, podemos determinar la localización de  $R$ . Supongamos que conocemos los puntos  $S_1$  y  $S_2$  donde se ubican los satélites y la distancias  $d_1$  y  $d_2$  de cada uno de ellos al receptor. Sabemos que el receptor se encuentra en algún punto sobre la circunferencia centrada en  $S_1$  y de radio  $d_1$ . Al mismo tiempo, debe estar sobre algún punto de la circunferencia centrada en  $S_2$  y de radio  $d_2$ . Es decir, teniendo las mediciones de dos satélites, la ubicación del receptor queda casi determinada: es uno de los dos puntos  $R_1, R_2$  en los que se intersectan ambas circunferencias. (ver figura (7.8))

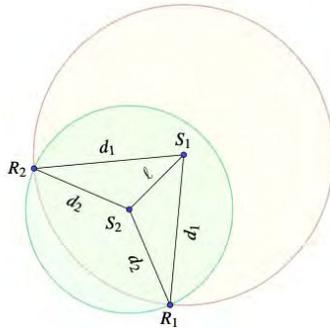


Figura 7.8: Puntos  $S_1$  y  $S_2$  donde se ubican los satélites y la distancias  $d_1$  y  $d_2$  de cada uno de ellos al receptor  $R$ .

Para encontrar las coordenadas de estos puntos en el plano, ubicamos el origen de coordenadas en  $S_1$  y el semieje positivo de las abscisas en la dirección de  $\vec{S_1S_2}$ . Llamamos  $l$  a la distancia entre los satélites. Lo antedicho, gráficamente se traduce en la imagen (7.9).

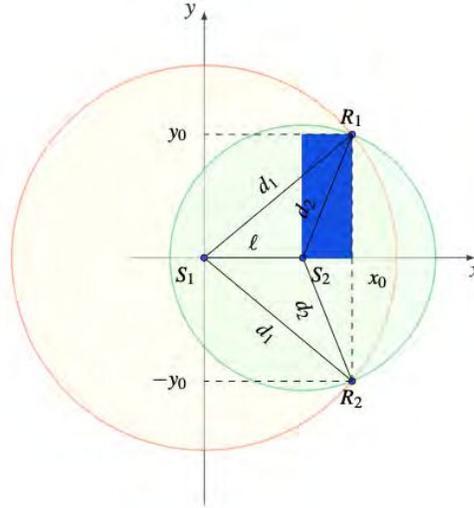


Figura 7.9: Coordenadas de los puntos en el plano

Por lo tanto, tenemos que:

$$d_1^2 = x_0^2 + y_0^2 \qquad d_2^2 = (x_0 - l)^2 + y_0^2$$

Restamos m.a.m ambas expresiones:

$$d_1^2 - d_2^2 = x_0^2 - (x_0 - l)^2$$

Por lo tanto, operando adecuadamente se deduce que:

$$x_0 = \frac{d_1^2 - d_2^2 - l^2}{2l} \qquad y_0^2 = d_1^2 - \left( \frac{d_1^2 - d_2^2 - l^2}{2l} \right)^2 \qquad (7.92)$$

Encontraremos la relación con el área de un triángulo trabajando la expresión obtenida anteriormente:

$$y_0 = \frac{\sqrt{(d_1 + d_2 + l)(d_1 + d_2 - l)(d_2 + d_1 + l)(d_1 - d_2 + l)}}{2l}$$

Consideremos el triángulo con vértices  $S_1$ ,  $S_2$  y  $R_1$  de la figura anterior y denominemos  $s$  al semiperímetro de ese triángulo, por lo tanto:

$$s = \frac{(d_1 + d_2 + l)}{2} \qquad (7.93)$$

podremos reescribir la formula para  $y_0$  de la siguiente manera:

$$y_0 = 2 \frac{\sqrt{s(s-l)(s-d_1)(s-d_2)}}{l}$$

Esta expresión puede interpretarse a partir de la **Fórmula de Herón** que afirma que el área  $A$  de un triángulo cuyos lados miden  $a$ ,  $b$  y  $c$  es en donde  $s$  es el semiperímetro:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \longrightarrow s = \frac{a+b+c}{2} \quad (7.94)$$

### 7.10.3. La relatividad general y el GPS

A los fines de sincronizar correctamente los relojes que se encuentran en los satélites y los relojes en la tierra es necesario tener en cuenta correcciones debido a efectos relativistas.

Debido a la naturaleza del espacio-tiempo para un reloj que se mueve con el satélite el tiempo *pasará más lentamente* que para un reloj situado junto al observador en tierra. Por otra parte, un reloj *bajo la influencia de un campo gravitacional más fuerte también medirá el tiempo más lentamente* (la fuerza de atracción gravitatoria decae a medida que aumenta la distancia a la tierra, por lo cual es más fuerte en la superficie terrestre que en la altura a la que se encuentra el satélite).

Si no se tuviese en cuenta el efecto sobre el tiempo que tiene la velocidad del satélite y su gravedad respecto del observador en tierra, se produciría un corrimiento de 38 microsegundos por día, que a su vez provocarían errores de varios kilómetros en la determinación de la posición.

La relatividad especial predice que la frecuencia de los relojes moviéndose a velocidades orbitales como la del satélite,  $v = 4\text{km/s}$ , *marcará el tiempo más lentamente que los relojes terrestres fijos con un retraso aproximado de 7 microsegundos por día.*

Por otro lado, es la teoría de la relatividad general la que predice que un reloj más cercano a un objeto masivo será más lento que un reloj más alejado. Aplicado al GPS, los receptores están mucho más cerca de la Tierra que los satélites, haciendo los relojes del observador en tierra ser más rápidos, aproximadamente 45 microsegundos por día. Al combinar estos dos efectos la discrepancia es de aproximadamente 38 microsegundos por día. Sin corrección, los errores en la distancia se incrementarían aproximadamente unos 10 km por día. Además las órbitas de los satélite son elípticas y no perfectamente circulares, lo que causa que los efectos varíen con el tiempo. Es decir, la diferencia de velocidad de los relojes de un satélite GPS y un receptor aumenta o disminuye en función de la altitud del satélite, la cual es variable con el tiempo haciendo necesaria la corrección.

Al igual que como lo comentamos en el capítulo (6.1) concluimos que tanto el observador en un sistema acelerado en el espacio libre de campo gravitatorio como el observador que está en un sistema en reposo sumergido en un campo gravitacional obtienen los mismos resultados cuando hacen un experimento de caída libre.

Consideremos en primer lugar un ascensor en reposo respecto de un sistema inercial, en el cual se han colocado dos relojes sincronizados, uno de ellos en el piso (**A**) y el otro en el techo (**B**) separados por una distancia **H**.

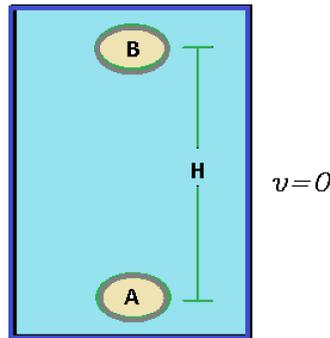


Figura 7.10: Ascensor en reposo respecto de un sistema inercial

El experimento sugiere que imaginemos que desde (**B**) se emiten rayos luminosos con un intervalo constante de tiempo, por lo tanto (**A**) los recibirá con la misma latencia. Consideremos ahora que el ascensor se desplaza hacia arriba con una aceleración **g** desde el instante inicial.

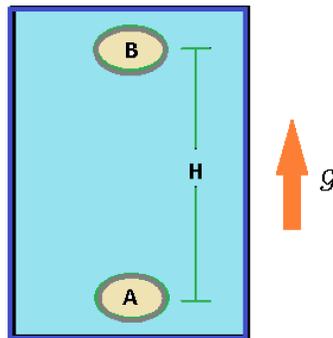


Figura 7.11: Ascensor desplazándose hacia arriba con una aceleración igual a  $g$

La situación es ahora muy diferente a la anterior pues mientras que la luz emitida desde (**B**) está viajando, el reloj (**A**) se mueve hacia arriba. En forma aproximada el tiempo  $\Delta t$  en el que la luz cubre el trayecto entre los relojes vale y la velocidad del ascensor será:

$$\Delta t = \mathbf{H}/c \quad \Delta v = g \cdot \Delta t \quad (7.95)$$

En este caso podremos aplicar el método conocido como *Efecto Doppler*, el observador en el piso medirá en la señal que recibe una frecuencia  $f_B$  dada por la expresión:

$$f_B = f'_B \left( 1 + \frac{\Delta v}{c} \right) \quad (7.96)$$

donde  $f'_B$  es la frecuencia propia del reloj (**B**). La expresión precedente nos muestra que, visto desde (**A**), el reloj (**B**) parece funcionar con mayor frecuencia.

Si llamamos  $\Delta f$  a la diferencia entre  $f_B - f'_B$  y haciendo uso de las expresiones (7.95), deducimos que:

$$\frac{\Delta f}{f'_B} = \frac{g \cdot \mathbf{H}}{c^2} \quad (7.97)$$

Este es un resultado que ha sido deducido a partir de considerar un ascensor acelerado. La analogía propuesta por Einstein entre los sistemas acelerados y los sometidos a campos gravitacionales sugiere que el mismo resultado sea válido para dos relojes ubicados en un campo gravitatorio. Por otro lado, podríamos asimilar al producto de  $(g \cdot \mathbf{H})$  a la diferencia de potencial gravitatorio ( $\Delta\Phi$ ) entre dos puntos situados a diferente altura sobre la superficie terrestre. Es decir:

$$\frac{\Delta f}{f'} = \frac{\Delta\Phi}{c^2} \quad (7.98)$$

Esta última expresión será de utilidad para el caso del GPS donde los satélites, dada las alturas de sus órbitas, *se encuentran en una región con un potencial gravitatorio muy distinto al de los receptores*.

Dado que los relojes involucrados, tanto en los satélites como en los observadores, se mueven en las observaciones uno respecto de otros y están ubicados en puntos distintos del campo gravitatorio terrestre y por lo tanto es necesario considerar efectos relativistas como los discutidos anteriormente.

Como ya es sabido, la velocidad relativa entre el reloj del receptor y los relojes de los satélites producen un efecto previsto por la *relatividad especial* (RE:2.3.1) que hace que los relojes de los satélites se atrasen respecto del reloj del receptor (o que disminuya su frecuencia).

Además, debido a que el potencial gravitatorio en los satélites es menor que en la superficie de la Tierra, se produce un efecto adicional previsto por la *relatividad general* (RG:5.3) que adelanta los relojes de los satélites respecto del reloj del receptor. El efecto conjunto, teniendo en cuenta las alturas orbitales y la velocidad de los satélites hace que los relojes de los mismos *vayan más rápido que cualquier reloj ubicado sobre la superficie terrestre*.

Por lo tanto, siendo:

- $f'_0$ : frecuencia emitida
- $f_0$ : frecuencia recibida en el receptor
- $\delta^{rel}$ : Variación relativa de frecuencias debida al efecto conjunto resultante de la velocidad con que orbita el satélite y de su posición en el campo gravitatorio

$$\delta^{rel} = \frac{f_0 - f'_0}{f'_0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} \quad (7.99)$$

Aceptando la hipótesis de que las órbitas tienden a ser circulares y considerando la masa de toda la Tierra ( $\mathbf{M}$ ) concentrada en su centro, se tendrá que el potencial gravitatorio en un punto ubicado a una distancia  $d$  del centro será:

$$\Phi = \frac{G \cdot M_T}{d} \quad (7.100)$$

Entonces, la diferencia de potencial entre los distintos niveles de altura entre la superficie terrestre y el satélite viene dado por ( $\mathbf{h}$ ) y sera:

$$\Delta\Phi = G \left[ \frac{M_T}{R_T} - \frac{M_T}{R_T + h} \right] \quad (7.101)$$

Reemplazando (7.101) en (7.99) obtenemos que:

$$\delta^{rel} = \frac{f_0 - f'_0}{f'_0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{G \cdot M_T}{c^2} \left[ \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right] \quad (7.102)$$

Los resultados obtenidos luego de resolver la ecuación (7.102) según los valores de las constantes definidas en (8.2) son:

$$\delta_{RE}^{rel} = -\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = -8,812 \cdot 10^{-11} \quad (7.103)$$

$$\delta_{RG}^{rel} = \frac{G \cdot M_T}{c^2} \left[ \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right] = 5,2921 \cdot 10^{-10} \quad (7.104)$$

$$\delta^{rel} = 4,4109 \cdot 10^{-10} \quad (7.105)$$

Por lo tanto, se producirá un desplazamiento de la frecuencia de:

$$f'_0 - f_0 = 0,00451 Hz \quad (7.106)$$

*El efecto relativista predominante en las observaciones se compensa disminuyendo en **0,00451 Hz** la frecuencia nominal de los relojes de todos satélites de la constelación antes de su lanzamiento. A través de esta metodología se introduce una corrección constante para los relojes a bordo de todos los satélites.*

Podríamos calcular la variación que la frecuencia genera en términos de tiempo. Consideremos el efecto acumulado durante un período de tiempo, por ejemplo, 24 horas:

$$\Delta t_{RE}^{rel} = 7,6 \mu seg \quad (7.107)$$

$$\Delta t_{RG}^{rel} = -45,7 \mu seg \quad (7.108)$$

$$\Delta t^{rel} = -38,1 \mu seg \quad (7.109)$$

#### 7.10.4. Conclusiones

El aporte de la teoría de la relatividad genera y especial (**RG**) y (**RE**) ponen claramente de manifiesto que el efecto conjunto de dichos tiempos, luego de 24 horas, se traduce en una alteración en la distancia de 11.400 metros, es por este motivo que los valores de frecuencia deben ser compensados, si se ignorasen, *derivarían en una perturbación del orden de 11.4 km diarios en la medición de la distancia satélite-receptor.*

*CITA: Carta de un astrónomo Frances a Emmanuel Macron, presidente de Francia.: “Sans théorie de la relativité, pas de GPS ” (CÉDRIC FOELLM EST ASTRONOME AU LABORATOIRE D’ASTROPHYSIQUE DE GRENOBLE)*

# Capítulo 8

## Apéndice

## 8.1. Constantes Universales

(7.1.1)

CONSTANTE	SÍMBOLO	VALOR	UNIDAD
Velocidad de la luz	$c$	$3 \cdot 10^8$	m/s
Constante de permeabilidad	$\mu_o$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m
Constante de permitividad	$\varepsilon_o$	$8,85 \cdot 10^{-12}$	F/m
Carga elemental	$e$	$1,6021 \cdot 10^{-19}$	C
Masa electrón en reposo	$m_e$	$9,1091 \cdot 10^{-31}$	kg
Masa del protón en reposo	$m_p$	$1,6725 \cdot 10^{-27}$	kg
Masa del neutrón en reposo	$m_n$	$1,6748 \cdot 10^{-27}$	kg
Constante de Faraday	$F$	$9,6496 \cdot 10^4$	C/eq-gramo
Constante de Planck	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$	J·s
Constante de estructura fina	$\alpha$	$7,30 \cdot 10^{-3}$	Adimensional
Radio de Bohr	$\alpha_o$	$5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Momento magnético del protón	$\mu_P$	$1,41 \cdot 10^{-26}$	J/T
Constante de Boltzmann	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Constante de gravitación	$G_N$	$6,67 \cdot 10^{-11}$	N·m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
Primera constante de radiación	$2\pi hc^2$	$3,74 \cdot 10^{-16}$	W/m <sup>2</sup>
Segunda constante de radiación	$hc/k$	$1,44 \cdot 10^{-2}$	m·K
Constante tensor de Einstein	$k = \frac{8\pi G_N}{c^4}$	$2,077 \cdot 10^{-43}$	$N^{-1}$
Constante cosmológica	$\Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_{\Lambda_0}$	$1,1056 \cdot 10^{-52}$	$m^{-2}$

Cuadro 8.1: CONSTANTES FUNDAMENTALES Y DERIVADAS

## 8.2. Otras constantes útiles

(7.10.3)

CONSTANTE	SÍMB.	VALOR	UNIDAD
Frec. nominal de los osciladores atómicos	$f'_0$	10,23	$Mhz$
Vel. de los satélites resp. a la sup. de la Tierra	$v$	3,98	$\frac{Km}{s}$
Velocidad de la luz	$c$	$3 \cdot 10^8$	$\frac{m}{s}$
Ctte. de gravitación universal	$G$	$6,6743 \cdot 10^{-11}$	$N \frac{Km^2}{Kg^2}$
Masa de la Tierra	$M_T$	$5,972 \cdot 10^{24}$	$Km$
Ctte. de grav. universal por la Masa de la Tierra	$GM_T$	398600,4	$\frac{Km^3}{seg^2}$
Radio medio de la Tierra	$R_T$	6371	Km
Altura media de los satélites	$h$	20200	Km

Cuadro 8.2: Constantes útiles

### 8.3. Unidades Electromagnéticas

(7.1.1)

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\varepsilon_0$	$\mu_0$	Sistema
1	$\frac{1}{c^2}$	1	1	CGS electrostático
$c^2$	1	1	1	CGS electromagnético
1	$\frac{1}{c^2}$	1	1	CGS Gaussiano
$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$	$4\pi 10^{-7}$	MKS Racionalizado

Cuadro 8.3: Sistema Cegesimal de Unidades

El vínculo entre las 3 constantes  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  viene dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{\left(\frac{\kappa_0}{\varepsilon_0}\right)}{(\kappa_1 \mu_0) \kappa_2} = c^2$$

## 8.4. Identidades Vectoriales

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \quad (8.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0 \quad (8.2)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (8.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0 \quad (8.4)$$

$$\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A}) = \varphi(\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{A} = 0 \quad (8.5)$$

$$\vec{\nabla}(\sigma \varphi) = \varphi \cdot \vec{\nabla} \sigma + \sigma \cdot \vec{\nabla} \varphi \quad (8.6)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (8.7)$$

$$\vec{\nabla}(\varphi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{A} + \varphi \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (8.8)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (8.9)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{A} \quad (8.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(\varphi \sigma) = 2\vec{\nabla} \sigma \cdot \vec{\nabla} \varphi + \varphi \nabla^2 \varphi + \varphi \nabla^2 \sigma \quad (8.11)$$

## 8.5. Simetrías e identidades

$$R(u, v) = -R(v, u) \quad (8.12)$$

$$\langle R(u, v)w, z \rangle = -\langle R(v, u)z, w \rangle \quad (8.13)$$

$$R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v = 0 \quad (8.14)$$

$$\langle R(u, v)w, z \rangle = \langle R(w, z)u, v \rangle \quad (8.15)$$

$$\langle \nabla_u R \rangle(v, w) + \langle \nabla_v R \rangle(w, u) + \langle \nabla_w R \rangle(u, v) = 0 \quad (8.16)$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (8.17)$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \quad (8.18)$$

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adb c} = 0 \quad (8.19)$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (8.20)$$

$$R_{abcd;e} + R_{abde;c} + R_{abec;d} = 0 \quad (8.21)$$

## 8.6. Sistemas de Coordenadas

### Coordenadas Cartesianas

$$f(x, y, z) \quad ; \quad \vec{f}(\vec{r}) = f_x(\vec{r})\check{e}_i + f_y(\vec{r})\check{e}_j + f_z(\vec{r})\check{e}_k$$

- **Gradiente:**

$$\vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f \right)$$

- **Divergencia:**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} f + \frac{\partial}{\partial y} f + \frac{\partial}{\partial z} f$$

- **Rotor:**

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \check{e}_i & \check{e}_j & \check{e}_k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

- **Laplaciano:**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### Coordenadas Cilíndricas

$$f(x, y, z) \rightarrow f(\rho, \phi, z); \quad \vec{f}(\vec{r}) = (f_\rho, f_\phi, f_z)$$

- **Gradiente:**

$$\vec{\nabla} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \check{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \check{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \check{z}$$

- **Divergencia:**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \cdot f_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

- **Rotor:**

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \check{\rho} & \rho \check{\phi} & \check{z} \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ f_\rho & \rho f_\phi & f_z \end{vmatrix}$$

- **Laplaciano:**

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

## Coordenadas Esféricas

$$f(x, y, z) \rightarrow f(R, \theta, \phi); \quad \vec{f}(\vec{r}) = (f_R, f_\theta, f_\phi)$$

- Gradiente:

$$\vec{\nabla} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial R} \check{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} \check{\theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \check{\phi}$$

- Divergencia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 f_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot f_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}$$

- Rotor:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \check{r} & R\check{\theta} & R \sin \theta \check{\phi} \\ \partial/\partial R & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ f_R & R f_\theta & r \sin \theta f_\phi \end{vmatrix}$$

- Laplaciano:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

## Coordenadas Generalizadas

- Gradiente

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = \sum \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \check{e}_i$$

- Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right]$$

- Rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \check{e}_1 & h_2 \check{e}_2 & h_3 \check{e}_3 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1 F_x & h_2 F_y & h_3 F_z \end{vmatrix}$$

- Laplaciano

$$\nabla^2(\Phi) \equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) \right]$$

# Capítulo 9

## Glosario

---

### 9.0.1. A

- **Agujeros Negros:** Son el resultado final de la muerte de una estrella supermasiva. El objeto resultante tiene un campo gravitatorio tan intenso que su velocidad de escape supera la de la luz. Por ello, ningún objeto microscópico o macroscópico que entra en el agujero negro puede escapar de él. En términos de la relatividad general, se dice que el espacio que rodea a un agujero negro alcanza una curvatura infinita y se convierte en una singularidad donde deja de existir el espacio y el tiempo.
- **Anisotropía:** La característica de depender de la dirección. La luz que llega con igual intensidad desde todas las direcciones (la luz del Sol, la de una bombilla en una habitación) es isotrópica. El haz de un foto que sigue los pasos de una bailarina sobre el escenario, es anisotrópico. La radiación cósmica de fondo es generalmente isotrópica, o lo que es lo mismo, su intensidad es la misma en todas las partes del cielo, pero se han detectado pequeñas anisotropías.
- **Asimetría:** Violación de la simetría.

### 9.0.2. B

- **Barión:** Hadrón con espín semientero. Los nucleones son bariones. De acuerdo con la teoría actualmente aceptada, los bariones están constituidos por tres quarks unidos por gluones. Los bariones poseen un número cuántico, el número bariónico es  $+1$  para bariones y  $-1$  para antibariones,  $1/3$  para quarks,  $-1/3$  para antiquarks y  $0$  para las demás partículas como electrones, neutrinos y fotones. La densidad de materia que podemos ver y detectar en el universo, como los planetas, estrellas o galaxias, se debe fundamentalmente a los bariones.
- **Big Bang:** Teoría cosmológica en la que toda la materia y energía del universo se originó a partir de un estado de enorme densidad y temperatura que explotó en un momento finito en el pasado hace unos 13.700 millones de años. Esta teoría explica de forma satisfactoria la expansión del universo, la radiación de fondo de microondas observada, característica de la radiación de cuerpo negro a una temperatura de aproximadamente  $3\text{ K}$  y la abundancia observada de helio en el universo, formado en los primeros 100 segundos después de la explosión a partir del deuterio a una temperatura de  $10.000.000.000.000\text{ K}$  (10 billones de grados Kelvin).

### 9.0.3. C

- **Causalidad:** Doctrina según la cual toda nueva situación debe haber sido el resultado de un estado anterior.
-

- **Conexión:** *En geometría diferencial, la conexión es un objeto matemático definido en una variedad diferenciable que permite establecer una relación o "conectar" la geometría local en torno a un punto con la geometría local en torno a otro punto.*
- **Conservación:** *Leyes que identifican una magnitud, como la energía, que permanece inmutable a lo largo de toda una transformación. Se piensa que todas las leyes de conservación involucran simetría. Esta ley nos dice que la magnitud total de una cierta propiedad física de un sistema, como la masa, energía o carga, se mantienen invariante incluso cuando hay intercambio de esa propiedad dentro de los componentes del sistema.*
- **Constantes fundamentales:** *Aquellos parámetros que aparentemente no han cambiado durante la evolución del universo.*
- **Contracción de Lorentz:** *Disminución en la longitud observada de un objeto a lo largo del eje de su movimiento, percibida por un observador externo que no comparte su velocidad.*
- **Corrimiento al rojo:** *Desplazamiento de las líneas espectrales en la luz proveniente de las estrellas de las galaxias distantes, que se considera producido por la velocidad de alejamiento de las galaxias en un universo en expansión (Ley de Hubble). Efecto Doppler*
- **Cosmología:** *Ciencia que se ocupa de estudiar la estructura, composición y evolución del universo como un todo. Combina la astronomía, la astrofísica, la física de partículas y una gran variedad de enfoques matemáticos que incluyen la geometría y la topología.*
- **Covarianza / Contravarianza:** *Referida a los tensores, describen el comportamiento ante un cambio de base.*
- **Cuerpo negro:** *Cuerpo que absorbe toda la radiación que incide sobre él. Tiene por lo tanto, emite y absorbe todo lo que recibe.*

#### 9.0.4. D

- **Densidad de la materia y densidad crítica:** *Densidad de materia que se obtendría si toda la materia contenida en las galaxias fuera distribuida a lo largo de todo el universo. Aunque las estrellas y los planetas tienen densidades mayores que la densidad del agua ( $\approx 1\text{gr}/\text{cm}^3$ ), la densidad media cosmológica es extremadamente baja (menos de  $10^{-29}\text{gr}/\text{cm}^3$ ) ya que el universo está formado casi exclusivamente por espacio virtualmente vacío entre galaxias. La densidad media de materia determina si el universo continuará expandiéndose o no. La densidad crítica es la densidad media de materia requerida para que la gravedad*

detenga la expansión del universo. Un universo con una densidad muy baja se expandirá por siempre, mientras que uno con una densidad muy alta colapsará finalmente.

- **Difeomorfismo:** Es un mapeo diferenciable, biyectivo e invertible que relaciona un espacio continuo y localmente plano (variedad) con otro. Las transformaciones de Lorentz son difeomorfismos del espacio-tiempo plano en sí mismo. Dadas dos variedades  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , una aplicación  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  es un difeomorfismo si es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable.

### 9.0.5. E

- **Electrodinámica:** Estudio de la conducta de las fuerzas electromagnéticas.
- **Electromagnética, interacción:** Una de las cuatro fuerzas fundamentales del universo que, siendo diferentes, tienen en común que pueden ocurrir entre los cuerpos, incluso cuando éstos no estén en contacto físico. (Concepto de campos)
- **Energía:** Medida de la capacidad de un sistema para producir trabajo.
- **Entropía:** Medida de la no disponibilidad de energía de un sistema para producir trabajo; en un sistema cerrado, un aumento en la entropía está acompañado por un descenso en la energía disponible.
- **Espacio-Tiempo:** Es el escenario donde ocurren todos los eventos físicos, se representa por una variedad real cuadridimensional diferenciable.
- **Espectro:** Registro de la distribución de materia o energía (por ejemplo luz) por longitud de onda. Se estudia el espectro para conocer la diversidad de la composición química y el movimiento de las estrellas y galaxias.
- **Estándar, modelo:** Combinación de la cromodinámica cuántica, para describir interacciones fuertes; la teoría electrodébil, para una descripción unificada de la interacción electromagnética y las interacciones débiles. El modelo estándar explica las partículas que componen la materia: quarks, hadrones, leptones, mesones y las partículas mediadoras, los bosones intermediarios: fotón para electromagnetismo, las partículas vectoriales  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$  para la fuerza nuclear débil y el gravitón para la fuerza de la gravedad.
- **Estrella:** Bola de gas luminosa que desde su formación a partir de nubes de gas y polvo comienza a fusionar el hidrógeno en helio. La masa máxima de una estrella es 120 masas solares, por encima de la cual sería destruida por su propia radiación. La masa mínima es de 0.008 masas solares; por debajo de ella, los objetos no serían lo suficientemente calientes en sus núcleos como para que comience la combustión del hidrógeno o proceso de fusión nuclear necesario

para que una estrella comience a brillar y emitir radiaciones termonucleares en forma de luz y calor; estos pequeños objetos son las estrellas marrones. Las estrellas brillan como resultado de la conversión de masa en energía por medio de las reacciones nucleares, siendo las más importantes las que involucran el hidrógeno. Por cada kilogramo de hidrógeno quemado de esta manera, se convierten en energía aproximadamente siete gramos de masa. De acuerdo a la fórmula de Einstein,  $E = mc^2$ , los siete gramos equivalen a una energía de 600.000.000.000.000.000 J. (600 trillones de Joules).

- **Expansión del universo:** Aumento constante en el tiempo de las distancias que separan las galaxias unas de otras sin que estas se muevan debido a la expansión del espacio-tiempo.
- **Física:** Ciencia que estudia las leyes que determinan la estructura del universo con referencia a la materia y la energía de la que está constituido. Se ocupa de las fuerzas que existen entre los objetos y las interrelaciones o correspondencias entre la masa y la energía.

### 9.0.6. F

- **Fuerza:** Agente que tiende a cambiar el momento de un cuerpo masivo. Es definido como una magnitud proporcional al ritmo de cambio del momento. Para un cuerpo de masa  $m$  que se desplaza a velocidad  $v$ , el momento es  $p = mv$  y la fuerza  $F = dp/dt = ma$ .

### 9.0.7. G

- **Galaxia:** Colección de estrellas, polvo y gas unidos por la atracción gravitatoria que se genera entre sus diversos componentes. Las galaxias son usualmente clasificadas por su forma en elípticas, espirales o irregulares. Las galaxias elípticas aparecen como nubes elipsoidales de estrellas con muy poca estructura interna aparte de un núcleo mas denso (en algunos casos). Las galaxias espirales son colecciones de estrellas con forma de disco plano con prominentes brazos espirales. Las galaxias irregulares no tienen estructura o forma aparente. El Sol pertenece a una galaxia espiral conocida como Galaxia o Vía Láctea, que contiene de 100.000.000.000.000 a 400.000.000.000.000 estrellas (100-400 billones de estrellas) con una edad de 13.51 billones de años y un diámetro de 1.420.000.000.000.000 km a 2.170.000.000.000.000 km (150.000-230.000 años luz).
- **Geodésica:** Se puede hablar de geodésicas en ‘espacios curvados’ (o variedades riemannianas) en donde, si el espacio contiene una métrica natural, entonces

---

las geodésicas son (localmente) la distancia más corta entre dos puntos en el espacio.

- **Grupo:** Es una estructura algebraica que consta de un conjunto con una operación que combina cualquier pareja de sus elementos para formar un tercer elemento. El par ordenado  $(\Lambda, *)$  es un grupo si y solo si  $*$  es una ley interna en  $\Lambda$ , asociativa, con elemento neutro y tal que todo elemento de  $\Lambda$  admite inverso respecto de  $*$ .

### 9.0.8. H

- **Hadrones:** (Espin semientero) Clase de partículas subatómica que interactúa fuertemente. Son una familia que está subdividida en dos ramas: Bariones (protones, neutrones, sigma, lambda, omega) y Mesones (Espin entero) (piones, kaones, psi, etc.).
- **Hilbert, espacio de:** Espacio vectorial lineal que puede tener un número infinito de dimensiones. El concepto es de gran interés en física porque el estado de un sistema en mecánica cuántica se representa por un vector en un espacio de Hilbert.
- **Hipótesis:** Proposición científica que pretende explicar un conjunto determinado de fenómenos; menos vasta y no tan bien confirmada como una teoría. La hipótesis mantiene una idea que puede o no ser cierta.
- **Homeomorfismo:** En topología, un homeomorfismo (misma forma) es una función de un espacio topológico a otro, que cumple con ser una función biyectiva continua y cuya inversa es continua. En este caso, los dos espacios topológicos se dicen homeomorfos.
- **Homomorfismo:** En matemáticas, un homomorfismo (morfismo) preserva desde un objeto matemático a otro la misma estructura algebraica.
- **Hubble:** El ritmo al que se expande el universo, aproximadamente igual a un aumento de la velocidad de 50 kilómetros por magapársec de distancia.

### 9.0.9. I

- **Indeterminación:** Principio de indeterminación de Heisenberg; principio de incertidumbre (o inserteza), en virtud del cual no es posible conocer con precisión ilimitada tanto la posición como el momento de una partícula simultáneamente.
  - **Inercia:** Propiedad de la materia que hace que se resista a cualquier cambio en su estado de movimiento.
-

- **Invarianza:** *Es algo que no cambia al aplicarle un conjunto de transformaciones, en otras palabras, se dice invariante respecto de o bajo una transformación si permanece inalterado tras la acción de tal transformación. La simetría también puede ser considerada una forma de invarianza.*
- **Isomorfismo:** *En matemáticas, un isomorfismo es un homomorfismo que admite inversa. El concepto matemático hace referencia a la idea de tener la misma estructura. Dos estructuras matemáticas entre las que existe una relación de isomorfismo se llaman isomorfas.*
- **Isotropía:** *Es la cualidad de ser igual en todas las direcciones, es exactamente lo contrario a la anisotropía que es distinta en diferentes direcciones.*

### 9.0.10. L

- **Ley:** *Teoría de tal amplitud y aplicación invariable que su violación se considera imposible. Ley de conservación de la masa, energía, etc.*
- **Línea del universo:** *Trayectoria seguida por un objeto en el espacio-tiempo. El hecho de que el espacio-tiempo sea cuatridimensional hace que las líneas de universo sean difíciles de visualizar, pero si el universo tuviera sólo una dimensión espacial y una temporal, podría dibujarse la línea del universo en un gráfico con el tiempo en el eje vertical y la distancia en el eje horizontal.*
- **Luz, velocidad:** *Velocidad de la causalidad. Definida exactamente por el valor:  $c=299.792.458\text{m/s}$ .*

### 9.0.11. M

- **Masa:** *Medida de la cantidad de materia de un objeto; se trata de una propiedad intrínseca de la materia y es una medida de la resistencia al cambio de movimiento. Medida de la participación en las interacciones.*
  - **Materia oscura:** *Materia no bariónica, es decir, no contiene ni protones ni neutrones. Interactúa con la gravedad, no interactúa con la radiación y no posee carga eléctrica.*
  - **Microondas de fondo:** *Referida a la radiación de fondo de microondas que inunda todo el universo como consecuencia del momento de la neutralización de la materia cuando se empiezan a formar los átomos y la materia empieza a ser transparente para la materia.*
  - **Monopolo magnético:** *Entidad magnética hipotética consistente en un polo norte o sur elemental aislado. Ha sido postulado como una fuente de campo*
-

---

magnético en analogía a la forma en que las partículas eléctricamente cargadas producen un campo eléctrico. Se han diseñado numerosos experimentos ingeniosos para detectar los monopolos, pero hasta ahora, ninguno ha producido un resultado definitivo.

### 9.0.12. N

- **Nodo:** Punto de mínima perturbación en un sistema de ondas estacionarias (Física). Cualquiera de los dos puntos en los que la órbita de un cuerpo celeste inercepta con un plano de referencia, habitualmente en el plano de la elíptica o el ecuador. (Astronomía.)

### 9.0.13. O

- **Onda:** Propagación de la energía mediante vibraciones coherentes que satisfacen la ecuación de onda.
- **Órbita:** Es el camino a través del espacio de un cuerpo celeste alrededor de otro.

### 9.0.14. P

- **Pársec:** Unidad básica de distancia estelar correspondiente a una paralaje trigonométrica de un ángulo de un segundo arco, es decir, es la distancia a la que una unidad astronómica subtiende un arco de un segundo en su ángulo. El pársec es igual a 3.2612 años luz.
- **Plasma:** El cuarto estado de la materia que consiste en electrones y otras partículas subatómicas sin ninguna estructura de un orden superior a la de los núcleos atómicos. Se trata de un gas altamente ionizado en el que el número de electrones libres es aproximadamente igual al número de iones positivos.
- **Protoestrella:** Estrella en proceso de formación o en la fase más temprana de su vida, condensándose a partir de una nube de gas y polvo, antes del comienzo de la combustión nuclear. Su masa aumenta durante unos 100.000 años a medida que cae materia en ella de la nube circundante.

### 9.0.15. S

- **Simetría:** Conjunto de invariancias de un sistema. Al aplicar una transformación de simetría sobre un sistema, el sistema queda inalterado. La simetría es estudiada matemáticamente usando teoría de grupos.
-

- **Simetría de gauge:** *Una simetría interna local y continua. Una transformación de simetría es interna cuando sólo afecta las variables dinámicas que definen al sistema, por ejemplo, diferentes cualidades de los observables. Cuando existe una conexión de la simetría interna con las coordenadas espacio- temporales por medio de los parámetros de la simetría, nos encontramos en el caso llamado transformaciones de gauge.*
- **Singularidad:** *Punto de curvatura infinita del espacio donde las ecuaciones de la relatividad general pierden su validez. Un agujero negro es una singularidad; lo mismo, quizá, el universo en el primer momento del tiempo. Se dice que es el punto matemático en el que ciertas cantidades físicas alcanzan valores infinitos. Así lo demuestra la relatividad donde sus ecuaciones nos dice que la curvatura del espacio tiempo se hace infinita en un agujero negro, o lo que es lo mismo, en ese punto que llamamos singularidad, el espacio y el tiempo dejan de existir.*

### 9.0.16. T

- **Tensor métrico:** *Elemento matemático de la geometría diferencial. El tensor de curvatura es una de la nociones métricas más importantes, es una generalización de la curvatura de Gauss a dimensiones más altas. (Tensor de Riemann y Tensor de Ricci).*
- **Teoría:** *Corresponde a todo aquello que tiene validez en una cierta escala.*
- **Tiempo:** *Dimensión que distingue el pasado, presente y futuro.*
- **Topología:** *Rama de la geometría que se ocupa de las propiedades de los objetos geométricos que permanecen inalteradas bajo deformaciones continuas, como el doblado o el estirado.*
- **Transporte Paralelo:** *En matemáticas, un transporte paralelo en una variedad  $M$  con conexión especificada es un modo de transportar vectores sobre curvas diferenciables de manera que permanezcan ‘paralelos’ respecto a la conexión dada. Es decir, un campo vectorial  $\mathbf{X}$  sobre una curva diferenciable  $\gamma$  se llama paralelo si:  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\mathbf{X} = 0$ .*

### 9.0.17. U

- **Universo; abierto, cerrado, plano, curvo:** *Modelos cosmológicos en los que, el universo, en función de la masa crítica (cantidad de materia que contenga), será de una u otra forma. Friedman nos dice que si la densidad crítica es menor que la ideal, el universo se expandirá para siempre; si es mayor, la gravedad frenará su expansión y todas las galaxias volverán sobre sus pasos hasta reunirse, en un solo punto, toda la materia del universo en una enorme bola de fuego,*

---

el Big Crunch. El modelo de Einstein- De Sitter, por el contrario, nos presenta un universo con exactamente la masa crítica ideal; el universo plano que se expandirá por toda la eternidad. (En cualquiera de los casos, el final no es muy alentador para nosotros, o morimos por el calor o por el frío. Claro que, para cuando eso tenga que ocurrir, seguramente ya no estaremos aquí).

### 9.0.18. V

- **Variedad:** Es un objeto geométrico estándar en matemática que generaliza la noción intuitiva de curva (1-variedad) y de superficie (2-variedad) a cualquier dimensión y sobre cuerpos diversos (no solamente el de los reales, sino también complejos y matriciales).
  - **Variedad pseudoriemanniana:** Es una variedad diferenciable equipada con un tensor métrico  $(0,2)$  diferenciable, simétrico, que es no degenerado en cada punto de la variedad. A diferencia de un tensor métrico riemanniano no tiene por qué ser definido positivo. Matemáticamente el espacio-tiempo curvo que usa la teoría de la relatividad es un variedad pseudoriemanniana con curvatura dada por la densidad de energía-impulso.
  - **Variedad riemanniana:** Es una generalización del concepto métrico, diferencial y topológico del espacio euclidiano a objetos geométricos que localmente tienen la misma estructura que el espacio euclidiano pero globalmente pueden representar forma “curva”. Los ejemplos más sencillos de variedades de Riemann son precisamente superficies curvas de  $\mathbb{R}^3$  y subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .
-

# Capítulo 10

## Bibliografía y Referencias

- 
- I.E. Irodov, "Leyes Fundamentales de mecánica" Editorial Mir 1981.
  - Notas de Clase. G. Abramson. Mecánica clásica. Instituto Balseiro. 2002
  - A.P. French, "Relatividad Especial", Reverté.1988.
  - S.R. Sanchez, "Relatividad para físicos", CopIt-arXives. Editor Octavio M. Vidal. 2018.
  - Relativity special, General and Cosmological. Second edition. Wolfgang Rindler. Editorial Oxford University Press. 2006
  - Luis N. Epele, Huner Fanchiotti y Carlos A. García Canal. Electrodinámica. Editorial Alianza. 1996
  - Goldstein. Mecánica Clásica. Editorial Reverté. 1987
  - L. Landau, E. Lifshitz. Curso abreviado de física teórica. Libro 2. Editorial MIR. 2004
  - Mathematical Methods for Physicist. Second Edition. Arfken. Editorial Academic Press. 1970.
  - R. Orús. Entropía de Agujeros Negros y correlaciones Cuánticas. Es. Barcelona.
  - Emilio S. Vázquez. El universo y la mente. Divulgación. 2008
  - F. T. Gratton. La radiación de microondas de fondo del universo. 2012
  - Berry, M., Principles of cosmology and gravitation, Cambridge, 1976.
  - Carlos García Canal. Astronomía, astrofísica y Cosmología. Notas de clase 4, 5, 6 y 7. <http://www.fisica.unlp.edu.ar/materias/fisicacosmoastro/teorias>. 2018
  - J.D. Jackson, Classical Electrodynamics (New York, 1999). 3rd ed.
  - R. Feynman, R. Leighton, M. Sands. The Feynman Lectures on Physics: Vol. 2. 2011
  - V. Ortíz B. Notación de Einstein. Notas de clase. 2014
  - Eduardo Battaner. Introducción a la Astrofísica. Madrid. Editorial Alianza. 1999
  - Eve M. Santangelo. Núcleos y Partículas Elementales. Dpto. de Física UNLP. <http://www.fisica.unlp.edu.ar/materias/particulas/teorias>. 2019
  - Nicolás Grandi. Notas de clase. Física multidisciplinaria. UNLP. 2019
-

- E. Sábató. Uno y el universo. Divulgación. 1968
  - P. Cobelli. Estructura de la materia I. Apunte de teórico de tensores. 2020
  - V. Muñoz, J. Rogan. Métodos de la física matemática II. Apuntes de un curso. Universidad de Chile. 2000
  - Guillermo Silva. Notas de clase: Relatividad General. UNLP. 2021
  - Luis N. Epele, Carlos A. García Canal. Con Goethe visitamos el saber científico contemporáneo. 2021
-



# Capítulo 11

## Análisis del Impacto de la Tesis

## 11.1. Presentación de la encuesta

En este capítulo se presenta la encuesta dirigida a los ingenieros y alumnos avanzados de ingeniería de las diversas especialidades. Dicha encuesta dará una visión sobre los temas desarrollados en los capítulos anteriores.

La encuesta consiste de 30 preguntas del tipo “multiple choice” relacionados con la física contemporánea y alguna de las conexiones con la ingeniería.

## 11.2. Consigna

Lea cuidadosamente cada ítem y marque la opción que considere correcta, tenga que cuenta que solo una las opciones es verdadera.

### Valoración:

Ítems: **1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28 y 30** sumarán 3 puntos cada uno.

Ítems: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29** (primeros 10 números primos) sumarán 4 puntos cada uno.

1. *La masa gravitacional e inercial aparecen con papeles muy distintos y el hecho de que sean iguales justifica expresamente el principio de equivalencia y la tercera Ley de Kepler. Por lo tanto, la masa inercial:*
  - a- Nos da información acerca de la fuerza de atracción o repulsión entre dos cuerpos.
  - b- Nos da información acerca de la fuerza aplicada en un cuerpo en un instante dado.
  - c- Nos dice cual es la aceleración que va a tener un cuerpo sobre el cual se está ejerciendo una cierta fuerza.
  - d- Ninguna de las anteriores.
2. *La tercera Ley de Kepler anuncia que el cuadrado del período de traslación de un planeta respecto al sol es:*

- 
- a- Directamente proporcional al cuadrado de la distancia e inversamente proporcional a la masa del mismo.
- b- Directamente proporcional a la masa por el cubo de la distancia media al sol.
- c- Directamente proporcional al cuadrado de la distancia por  $2\pi$ .
- d- Ninguna de las anteriores.
3. *En cualquier cambio que se produzca en la naturaleza, la suma de las acciones gastadas en este cambio será lo más pequeña posible. Esto fue enunciado por:*
- a- Pierre Louis Moreau de Maupertuis.
- b- Joseph-Louis Lagrange.
- c- William Rowan Hamilton.
- d- Ninguna de los anteriores.
4. *La ecuación de Euler-Lagrange en función de las coordenadas generalizadas nos permite contar con un sistema analítico para obtener las ecuaciones que describen el comportamiento físico de las partículas. Lea atentamente y marque la opción que le parezca correcta.*
- a- Las coordenadas generalizadas del sistema solo expresan distancias y depende del sistema de coordenadas utilizado.
- b- Al no ponerse de manifiesto el carácter vectorial en dicha expresión es invariante bajo cambios de coordenadas.
- c- Como la función lagrangiana depende de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y el tiempo, una derivada con respecto a  $q_i$  afecta directamente a la  $\dot{q}_i$
- d- Ninguna de las anteriores.

- 
5. *El concepto de “persistencia del movimiento” elevado por Newton como primera Ley de la Dinámica o Principio de Inercia, se rige bajo el concepto de:*
- a- Gottfried Leibniz.
  - b- Aristóteles.
  - c- Kepler.
  - d- Ninguna de las anteriores.
6. *Sabiendo que el factor de proporcionalidad  $\gamma$  toma valores dependiendo de la velocidad “v” con la que se mueve un sistema de referencia respecto al otro. Si el valor de v (velocidad) es igual a cero. Significa que:*
- a- Los dos sistemas son el mismo y por tanto las coordenadas también han de coincidir.
  - b- El valor de gamma tiende a infinito.
  - c- Obtenemos un factor de proporcionalidad complejo.
  - d- Ninguna de las anteriores.
7. *Einstein propuso que la masa de un cuerpo es una de las distintas formas en que se manifiesta su contenido energético. Esto significa que:*
- a- En un sistema aislado se conserva la energía por un lado y la masa por otro.
  - b- Se conserva la energía que proviene de la masa en reposo de la partícula, lo que es el equivalente a  $E_k = m_0c^2$ .
  - c- Se conserva la suma de la energía más el equivalente energético de la masa.
  - d- Ninguna de las anteriores.
-

- 
8. *La discrepancia observada en las curvas de rotación galáctica y la predicción de Newton-Kepler si suponemos que hay una masa central dominante con el material lumínico observado puede deberse a:*
- a- Un exceso de cantidad lumínica producto de la gran cantidad de estrellas.
  - b- La fuerte gravedad observada por la masa central dominante.
  - c- La presencia de masa gravitatoria que no se manifiesta a través de las otras interacciones.
  - d- Ninguna de las anteriores.
9. *La Ley de Hubble-Humason expresa que el universo se esta expandiendo y la velocidad a la que se están alejando las galaxias es proporcional a la distancia entre ellas, esto significa que las que están más lejos se alejan más rápidamente. Esto se debe a que:*
- a- Las galaxias más lejanas poseen mayor velocidad dado que el efecto gravitatorio sobre estas es menor y por tanto tienden a moverse más rápidamente.
  - b- Las galaxias que están más alejadas adquieren mayor velocidad debido que el radio vector que une la posición relativa de cada galaxia es mayor.
  - c- En el universo se expande el espacio tiempo y las galaxias se están alejando entre ellas sin moverse.
  - d- Ninguna de las anteriores.
10. *Conforme el Universo se expande, la densidad espectral del fondo de radiación se va corriendo al rojo lo cual nos permite determinar tanto la constante de Hubble como la edad del Universo, esto sucede debido que:*
- a- Disminuye la temperatura, reduciendo la energía de los fotones aumentando sus longitudes de onda.
  - b- Aumenta la temperatura, lo que produce un aumento de energía de los fotones aumentando también sus longitudes de onda.

- 
- c- La temperatura aumenta debido a que es inversamente proporcional a la longitud de escala del universo.
- d- Ninguna de las anteriores.
11. *El parámetro de densidad de universo  $\Omega(t)$  está relacionado con la curvatura  $K$  del universo, la constante de Hubble  $H$  y el factor de escala  $a(t)$  siendo:*
- a- Directamente proporcional a la constante de curvatura del universo y al factor de escala.
- b- Inversamente proporcional a la constante de Hubble y directamente proporcional al factor de escala.
- c- Inversamente proporcional a la constante de curvatura del universo y directamente proporcional al factor de escala al cuadrado por la constante de Hubble.
- d- Ninguna de las anteriores.
12. *Haciendo referencia a la materia oscura, podemos decir que:*
- a- Es oscura porque presenta una completa absorción de la luz y a su vez tiene masa, por lo tanto, interacciona con la gravedad.
- b- Es neutra e interacciona con la gravedad, pero no con la radiación.
- c- Es neutra porque no posee carga eléctrica y además no interacciona ni con la luz ni con la gravedad.
- d- Ninguna de las anteriores.
13. *La densidad media de materia del universo determina si continuará expandiéndose o no. La densidad crítica es la densidad de materia requerida para que la gravedad detenga el proceso de expansión del universo. ¿Qué ocurrirá con el universo con una densidad de materia muy baja (menor que la densidad crítica)?*

- 
- a- Colapsará.
  - b- Se quedará estático.
  - c- Se expandirá por siempre.
  - d- Ninguna de las anteriores.
14. *Según la teoría de la relatividad general, la gravedad es considerada como:*
- a- Una fuerza que atrae a cualquier cuerpo al centro de la tierra o de cualquier otro cuerpo celeste.
  - b- Una aceleración cuyo valor es de  $9,81m/s^2$  y que interactúa en todos los cuerpos por igual independientemente de su masa o tamaño.
  - c- Una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo siendo esta curvatura provocada por la presencia de materia.
  - d- Ninguna de las anteriores.
15. *Los sucesos que están situados en zonas del espacio-tiempo que no tienen relación de causalidad con la nuestra y que puede representarse gráficamente mediante el cono de luz. Se dice que pertenecen a la:*
- a- Región tipo Luz.
  - b- Región tipo Espacio.
  - c- Región tipo Tiempo.
  - d- Ninguna de las anteriores.
16. *Se trata de una variedad de cuatro dimensiones y curvatura nula e isomorfa, en la cual 3 dimensiones son espaciales y una temporal, de manera que todas juntas sirven para representar el espacio-tiempo. Estamos hablando de:*

- 
- a- El Espacio-Tiempo de Minkowski.
  - b- Tensor métrico.
  - c- Curvatura intrínseca de una variedad.
  - d- Ninguna de las anteriores.
17. *La masa de un núcleo de helio es menor que la suma de las masas de sus componentes (2 protones y 2 neutrones), este fenómeno se debe a:*
- a- La energía no siempre se conserva.
  - b- La diferencia la energía que se libera en un proceso de fusión nuclear debido a la energía de ligadura entre los nucleones.
  - c- Las masas deben ser iguales y el error es producto de una medición errónea.
  - d- Ninguna de las anteriores.
18. *Qué entiende por tensor energía impulso  $T_{\mu\nu}$*
- a- Representa la geometría del espacio-tiempo alrededor de un cuerpo esférico aislado y estático.
  - b- Es una métrica arbitraria definida sobre un espacio euclídeo.
  - c- Es el flujo de cuádrimomento  $p_\mu$  a través de una superficie  $x_\nu$  constante.
  - d- Ninguna de las anteriores.
19. *Al trabajar en coordenadas curvilíneas y al pasar de un punto a otro, los vectores tangentes a las líneas coordenadas usados como base no coincidirán de un punto a otro y es necesario evaluar su variación. En general los vectores “base” no sólo dependen de un punto y por lo tanto es necesario especificar cómo se “conectan” los vectores en diferentes puntos. Esto se hace por medio de una*

*conexión que implica a:*

- a- El tensor de Ricci.
  - b- El tensor de Riemann.
  - c- Los símbolos de Christoffel.
  - d- Ninguna de las anteriores.
20. *Las ecuaciones de Maxwell son locales y muestran que los campos eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de onda validando el concepto de ondas electromagnéticas, luego de esto se acepta que la luz es un tipo particular de onda electromagnética. La primera ecuación de Maxwell que da al equivalente eléctrico de la Ley de Gauss nos dice que:*
- a- El flujo del campo eléctrico a través de una superficie abierta es proporcional a la carga total encerrada dentro de la superficie.
  - b- El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero.
  - c- La divergencia del campo eléctrico es proporcional a la densidad volumétrica de carga eléctrica siendo éstas las fuentes escalares de dicho campo.
  - d- Ninguna de las anteriores.
21. *Que la divergencia del campo magnético sea cero implica la no existencia de monopolos magnéticos, es decir, hasta entonces no hay ninguna evidencia experimental de su existencia. Esto significa que:*
- a- El flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada siempre es cero, no existe un equivalente magnético de una carga eléctrica y por lo tanto no posee fuentes ni sumideros.
  - b- Las líneas el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada da como resultado fuentes escalares de campo.

- 
- c- Existen fuentes y sumideros para los campos magnéticos como en el caso de los campos eléctricos.
- d- Ninguna de las anteriores.
22. *El campo de inducción magnético  $H$  a lo largo de una curva  $C$  alrededor de un conductor con una corriente  $j$  no es igual al flujo de la corriente pasando por la superficie  $S$  si dicha superficie  $S$  pasa entre las dos placas de un condensador. Esto conduce a la Ley de Ampere-Maxwell y da lugar a un término conocido como:*
- a- Corriente de conducción.
- b- Densidad de corriente superficial.
- c- Corriente de desplazamiento.
- d- Ninguna de las anteriores.
23. *Cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, posee su correspondiente ley de conservación. ¿A quién se le atribuye este teorema?*
- a- Isaac Newton.
- b- Emmy Noether.
- c- Albert Einstein.
- d- Ninguno de los anteriores.
24. *Dado que los relojes involucrados entre un satélite y un receptor se mueven en las observaciones uno respecto del otro, la velocidad relativa entre sendos relojes (receptor-satélite) produce un efecto que hace que los relojes de los satélites se atrasen respecto del reloj del receptor (o que disminuya su frecuencia). Este es un efecto previsto por:*
- a- La teoría de la relatividad especial.

- 
- b- La teoría de la relatividad general.
- c- La teoría de la relatividad especial y general.
- d- Ninguna de las anteriores.
25. *Debido a que el potencial gravitatorio en los satélites es menor que en la superficie de la Tierra (producto de la distancia), se produce un efecto que hace que se adelanten los relojes de los satélites respecto a los relojes del receptor. Este efecto es previsto por:*
- a- La teoría de la relatividad especial.
- b- La teoría de la relatividad general.
- c- La teoría de la relatividad especial y general.
- d- Ninguna de las anteriores.
26. *Cuando se desea transmitir algún tipo de información de forma satelital, debe tenerse en cuenta que la señal electromagnética viaja a la velocidad de la luz. Por lo tanto, si queremos evaluar los potenciales en un tiempo  $t$  en una cierta posición  $r$ , en el cual el “mensaje” fue enviado. Lo que realmente importa es:*
- a- El estado de la fuente en el primer instante  $t_0$  (tiempo inicial).
- b- Su condición en un cierto tiempo anterior  $t_r$  (tiempo retardado).
- c- Es indistinto dado que ambos tiempos  $t_0$  y  $t_r$  son iguales.
- d- Ninguna de las anteriores.
27. *Cuando estudiamos los campos asociados a cargas puntuales móviles debidos a potenciales retardados, notamos que en las expresiones de dichos campos aparecen términos que decrecen con el inverso a la primera potencia de la distancia (fuente-campo) y tenemos otro que decae con el inverso cuadrado de la distancia (fuente-campo). ¿Cuál es el término asociado al “Campo de radiación”?*

- 
- a- El que decrece a la primera potencia de la distancia (fuente-campo).
  - b- El que decrece con el inverso cuadrado de la distancia (fuente-campo).
  - c- Ambos pertenecen al campo de radiación.
  - d- Ninguna de las anteriores.
28. *Dado que los campos eléctrico y magnético generados por una carga puntual son siempre perpendiculares entre si y, además, perpendiculares al vector que va desde la posición retardada hasta el punto de evaluación del campo. Se puede obtener uno campo a partir del otro mediante:*
- a- El producto vectorial entre ambos campos.
  - b- El cociente entre uno de ellos y la Impedancia intrínseca de la onda.
  - c- El algoritmo de cálculo que relaciona a dichos campos.
  - d- Ninguna de las anteriores.
29. *El vector de Poynting generado por el aporte de los campos eléctrico y magnético debido a la radiación emitida por un dipolo eléctrico (en nuestro caso), nos da información acerca de:*
- a- La región del espacio en la que interactúa la fuerza eléctrica.
  - b- La intensidad de la onda electromagnética generada por el campo  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ .
  - c- La dirección del flujo de energía o energía transferida por unidad de área y de tiempo de la onda electromagnética.
  - d- Ninguna de las anteriores.
30. *¿Cómo será la variación relativa de frecuencias debido al efecto conjunto resultante entre la velocidad que órbita un satélite y su posición en el campo*
-

---

*gravitatorio si reubicamos el satélite a una altura notablemente mayor?*

- a- La variación de frecuencias será mayor.
- b- La variación de frecuencias será menor.
- c- No influiría en lo absoluto.
- d- Ninguna de las anteriores.

### 11.3. Resultados

Para obtener los resultados del impacto generado por el trabajo de tesis, se eligieron las respuestas de 6 de los participantes en función de las siguientes especialidades: 4 de *Ingeniería* y 2 *Docentes* de escuela secundaria:

A continuación, se presenta un gráfico que hace referencia al puntaje obtenido por cada uno de los seis participantes elegidos y el promedio total, de este modo, evaluamos el impacto producido por el trabajo de tesis.

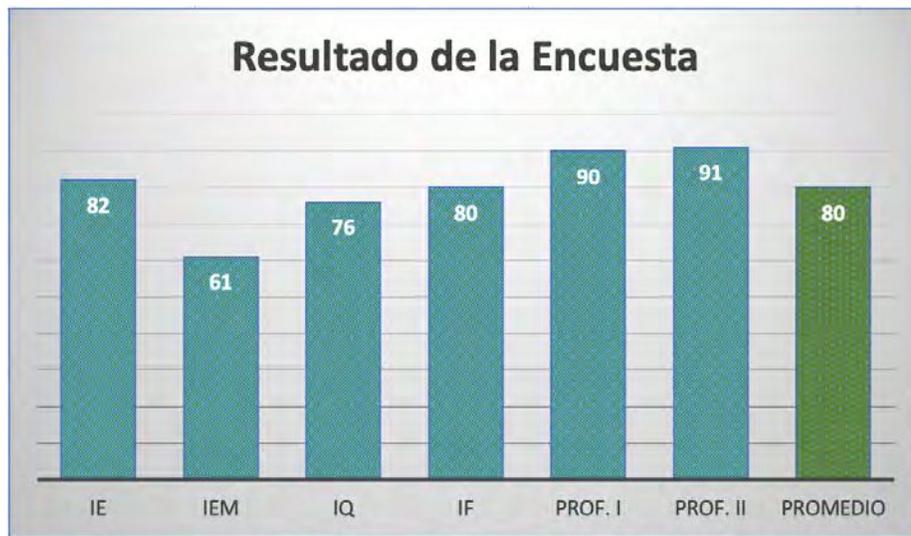


Figura 11.1: I: Ingeniería, E: Electrónica, EM: Electromecánica, Q: Química, F: Ferroviaria, Prof. I, II: Profesores de escuela secundaria de Matemática y Física

Por otra parte, el trabajo de tesis seguirá siendo distribuido como material de consulta sobre los temas de la física contemporánea tratados en la tesis con el fin de promover el interés de aquellos profesionales y estudiantes que estén dispuestos a enriquecer sus conocimientos en el área tratada.

---

## 11.4. Conclusiones

Los resultados obtenidos por parte de los participantes encuestados pusieron claramente de manifiesto el interés por intentar comprender nuevos conceptos referidos a la física contemporánea y la ingeniería y, al mismo tiempo, la responsabilidad y dedicación por parte de ellos.

Tuve como objetivo llegar a las distintas ramas de la ingeniería y, en particular, a aquellas que de alguna manera tienen más relación con los contenidos vistos. Tras el análisis de los resultados, se pudo observar que el impacto producido ha sido muy satisfactorio dado que demostraron haber comprendido el 80 % de los temas expuestos lo cual, haber llegado con este mensaje de la Física Contemporánea a docentes, ingenieros y estudiantes de ingeniería los que usualmente no son abordados durante su formación y que sin duda deberían ser incorporados, fue ciertamente gratificante. Por lo tanto, este resultado nos anima a difundir aun más el texto de la tesis entre los los estudiantes y profesores de ingeniería.

Esta planificado difundir esta monografía y ponerla a disposición en una página web de la UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL de manera que esté al alcance de aquellos interesados que deseen tener contacto con la física contemporánea.

Dado que los lectores han manifestado interés en el agregado del glosario ya que les facilitó la lectura, se preve seguir incrementando y enriqueciendo el vocabulario y terminologías utilizadas con el fin de suavizar la lectura y mejorar el entendimiento.



## Capítulo 12

### Conclusiones Generales

---

## 12.1. Experiencias

En primera medida, quiero reconocer el impacto recibido a nivel personal luego de haber finalizado esta etapa correspondiente a los estudios de posgrado de la Maestría en Física Contemporánea. No cabe dudas que, según mi más humilde apreciación, el paso por la UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA me ha brindado la posibilidad de ver el mundo con otros ojos y de comprender de otra manera los fenómenos de la naturaleza en los cuales estamos inmersos, potenciando y enriqueciendo la base en la que sustento las materias que enseñé como docente.

## 12.2. Impacto

La elaboración de este trabajo ha despertado en mí la motivación de seguir trabajando sobre los tópicos de la Física Contemporánea y sus aplicaciones, expandiendo en conocimientos sobre temas no tratados en este trabajo como *la Mecánica Cuántica* y *la Física de la Materia Condensada* ya que tienen claramente un sin fin de aplicaciones en el campo de la ingeniería.

## 12.3. Motivación

Todo este desarrollo promovió en mí el incentivo a seguir estudiando y aprendiendo nuevos conceptos de la física contemporánea, más precisamente, profundizando cuestiones relacionadas con la Física Teórica en el campo de la Electrodinámica, la Relatividad General y la Mecánica Cuántica.